4

- 拋物線
- 橢圓
- 雙曲線
- 重點回顧
- 歷屆試題

主題一 拋物線

1. 定義：1 設 L 是一定直線，F 是不在 L 上的一點，則在包含 L 與 F 的平面上，至 F 與 L 等距離的所有點所形成的圖形，稱為以 F 為焦點，L 為準線的拋物線

2. 標準式：

標準式	$(y-k)^2=4c(x-h)$	$(x-h)^2=4c(y-k)$
類型	左右型	上下型
中心	(h,k)	(h,k)
焦點	$(h+c,k)$	$(h,k+c)$
準線	$x-h+c=0$	$y-k+c=0$
對稱軸	y−k=0	x−h=0
焦距	$\|c\|$	$\|c\|$
正焦弦長	$\|4c\|$	$\|4c\|$
離心率	1	1
圖形開口	c>0, 向右 c<0, 向左	c>0, 向上 c<0, 向下

3. 標準式：

(1)向左或向右開口⇒$(y-k)^2=4c(x-h)$

c＞0 向右，c＜0 向左

頂點(h, k)，焦點(h+c, k)，正焦弦長 4｜c｜

準線：x－h+c＝0，對稱軸：y－k=0

(2)向上或向下開口⇒$(x-h)^2=4c(y-k)$

c＞0 向上，c＜0 向下

頂點(h,k)，焦點$(h,k+c)$，正焦弦長$4|c|$

準線$y-k+c=0$，對稱軸$x-h=0$

4. 一般式：

(1)軸平行x軸：$x=ay^2+by+c$

(2)軸平行y軸：$y=ax^2+bx+c$

教師解析

試求拋物線$x^2+2x+4y-7=0$之頂點、焦點、準線、軸、正焦弦長及離心率。

自我挑戰

1. 試求拋物線$2x^2+8x+y+2=0$之頂點、焦點、準線、軸、正焦弦長及離心率。
2. 試求拋物線$y^2+3x+4y+1=0$之頂點、焦點、準線、軸、正焦弦長及離心率。

試求頂點為(2, 1), 焦點為(4, 1)之拋物線方程式。

3. 試求頂點為(2, 1), 準線為y=4之拋物線方程式。
4. 試求焦點為(2, 1), 準線為x=1之拋物線方程式。

試求對稱軸與 x 軸平行，且過(1,-1),(9,1),(9,-2)三點之拋物線方程式。

5. 試求對稱軸與 x 軸平行，且過(-1,2)，(2,5)，(0,2)三點之拋物線方程式。

6. 試求對稱軸與 x 軸平行，且過(3,0)，(1,-2)，(-1,-8)三點之拋物線方程式。

試求焦點為(-1,2),準線為 x-2y-3=0 之拋物線方程式。

7. 試求焦點為(-1,1),準線為 x-y-2=0 之拋物線方程式。

8. 試求焦點為(1,2),準線為 x+y-1=0 之拋物線方程式。

試求與$x^2=8y$相切且與3x-2y=0平行之直線方程式

9. 試求過(-1,2)且與拋物線$y=x^2-2x-1$相切之直線方程式

10. 試求過(-3,-2)且與拋物線$y^2-y+x-3=0$相切之直線方程式

作業研究

1. 設拋物線與 y 軸交於 A、B 兩點，則 $\overline{AB}$ =Ⓐ8Ⓑ10Ⓒ12Ⓓ14

2. 已知一拋物線的頂點為原點，軸為 x 軸，且過點(2, 8)則此拋物線方程式為Ⓐ $x^2=-32y$ Ⓑ $x^2=32y$ Ⓒ $y^2=-32x$ Ⓓ $y^2=32x$

3 拋物線的焦點坐標為Ⓐ(2, 12) Ⓑ(2, -3) Ⓒ(-1, 0) Ⓓ(5, 0)

4. 圖形 $\{(x,y)|x^2-6x+4y+5=0\}$ 之焦點為(a, b)，則Ⓐ $(a-1)^2+b^2=4$ Ⓑ $(a-1)^2+b^2>4$ Ⓒ $(a-1)^2+(b-1)^2=1$ Ⓓ $(a-1)^2+(b-1)^2<1$

5. 已知一拋物線的頂點為(1, 0), 準線為 x-3=0, 則此拋物線方程式 Ⓐ $x^2-8y-8=0$ Ⓑ $x^2+8y-8=0$ Ⓒ $y^2=4x$ Ⓓ $y^2=-4x$

～解答～

學生練習

1. 頂點(-2,6),焦點(-2,47/8),準線 y=49/8,軸 x=-2,正焦弦長 1/2,e=1

2. 頂點(1,-2),焦點(1/4,-2),準線 y=7/4,軸 y=-2,正焦弦長 3,e=1

3. $(x-1)^2=-24(y+2)$

4. $(y-1)^2=4(x-2)$

5. $y=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+2$

6. $y=-\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{9}{2}$

7. $x^2+y^2+2xy+8x-8y=0$

8. $x^2+y^2-2xy-2x-6y+9=0$

9. 4x+y+2=0

10. x-5y-7=0

作業研究

1Ⓒ2Ⓓ3Ⓑ4Ⓐ5Ⓑ

主題二 橢圓

1.定義：在同一平面上到兩定點F及F’之距離和為定數

$2a(2a>\overline{FF'})$之所以動點P所以形成之圖形稱為橢圓，兩定點F及

F’稱為焦點

(1) $\overline{PF}+\overline{PF'}>\overline{FF'}\Rightarrow$ 圖形為橢圓

(2) $\overline{PF}+\overline{PF'}=\overline{FF'}\Rightarrow$ 圖形為線段

(3) $\overline{PF}+\overline{PF'}<\overline{FF'}\Rightarrow$ 無圖形

2.標準式：$\left(a>b>0, c^2=a^2-b^2\right)$

標準式	$\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$	$\dfrac{(x-h)^2}{b^2}+\dfrac{(y-k)^2}{a^2}=1$
中心	(h,k)	(h,k)
焦點	$(h\pm c,k)$	$(h,k\pm c)$
長軸頂點	$(h\pm a,k)$	$(h,k\pm a)$
短軸頂點	$(h,k\pm b)$	$(h\pm b,k)$
準線	$x=h\pm\dfrac{a^2}{c}$	$y=k\pm\dfrac{a^2}{c}$
長軸長	2a	2a
短軸長	2b	2b
正焦弦長	$\dfrac{2b^2}{a}$	$\dfrac{2b^2}{a}$
離心率	$e=\dfrac{c}{a}$	$e=\dfrac{c}{a}$

3.圖形：

4.參數式：

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1\Rightarrow\begin{cases}x=h+a\cos\theta\\ y=k+b\sin\theta\end{cases}(0\le\theta<2\pi)$$

5.橢圓內之幾何度量

(1)橢圓之面積$=ab\pi$　　　(2)內接正方形面積$=\dfrac{4a^2b^2}{a^2+b^2}$，

周長$=\dfrac{8ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$

(3)內接矩形面積最大$2ab$，周長$4\sqrt{a^2+b^2}$

6. 參數式：

(1)躺著：$\begin{cases} x=h+a\cos\theta \\ y=k+b\sin\theta \end{cases}$ $(0\le\theta<2\pi)$

(2)站著：$\begin{cases} x=h+b\cos\theta \\ y=k+a\sin\theta \end{cases}$ $(0\le\theta<2\pi)$

7. 性質：

(1)橢圓內接矩形最大面積：2ab

(2)橢圓面積：πab

(3)外切最小矩形面積：4ab

(4)內接正方形面積：$\dfrac{4a^2b^2}{a^2+b^2}$

(5)內接最大三角形面積：$\dfrac{3\sqrt{3}}{4}ab$

老師解析

試求在坐標平面上與兩定點(0,−5),(0,1)距離和恒為10之軌跡方程式

自我挑戰

1. 試求在坐標平面上與兩定點(2,1),(−6,1)距離和恒為10之軌跡方程式
2. 試求在坐標平面上與兩定點($\sqrt{5}$, 0),($-\sqrt{5}$, 0)距離和恒為6之軌跡方程式

試求橢圓$16x^2+9y^2-64x+18y-71=0$之中心、頂點、焦點、準線、長軸長、短軸長、正焦弦長及離心率

試求下列各橢圓之中心、頂點、焦點、準線、長軸長、短軸長、正焦弦長及離心率

3. $x^2+4y^2+6x-8y-3=0$
4. $3x^2+2y^2+12x+4y+8=0$

試求長軸之兩頂點為(2,1)(-8,1)且短軸長為8文橢圓方程式

若$\dfrac{x^2}{9-k}+\dfrac{y^2}{k-4}=1$表之莖形為橢圓，且其長軸在x軸上，試求k之範圍

5. 試求兩焦點點為(-2,5)(-2,-1)且短軸長為10文橢圓方程式

6. 試求中心為(3,-1)，長軸長為6，短軸長為4，且長軸平行x軸之方程式

7. 若$\dfrac{x^2}{7-k}+\dfrac{y^2}{k-3}=1$表之莖形為橢圓，且其長軸在x軸上，試求k之範圍

8. 若$\dfrac{x^2}{4-k}+\dfrac{y^2}{k-1}=1$表之莖形為橢圓，且其長軸在y軸上，試求k之範圍

試求橢圓
$25x^2+16y^2+50x-96y-231=0$
之參數方程式

9. 試求$\begin{cases} x=-2+3\cos\theta \\ y=1+2\sin\theta \end{cases}$
$(0\le\theta\le 2\pi)$之直角坐標方程式

10. 試求$\begin{cases} x=1+5\cos\theta \\ y=-2+3\sin\theta \end{cases}$
$(0\le\theta\le 2\pi)$之直角坐標方程式

作業研究

1. 一橢圓方程式為$4x^2+y^2+8c-2y-3=0$，則其長軸長等於Ⓐ$2\sqrt{2}$Ⓑ$4\sqrt{2}$Ⓒ8Ⓓ16

2. 橢圓$\dfrac{(x-2)^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$之內接矩形中面積最大者為Ⓐ18Ⓑ16Ⓒ12Ⓓ6

3. 設橢圓$9x^2+4y^2=36$的長軸長為m，短軸長為n，則m+n=Ⓐ5Ⓑ10Ⓒ3Ⓓ36

4. 關於橢圓$x^2+4y^2=4$之描還何者錯誤Ⓐ短軸長為1Ⓑ長軸長為4Ⓒ長軸之端點為(-2, 0), (2, 0)Ⓓ焦點坐標為($\sqrt{3}$, 0), ($-\sqrt{3}$, 0)

5. 已知一橢圓的二焦點為(-2, 0), (2, 0), 長軸長為10，則此橢圓的短軸長等於Ⓐ8Ⓑ$2\sqrt{19}$Ⓒ$2\sqrt{21}$Ⓓ$2\sqrt{23}$

6. 試求二次曲線的參數式為$\begin{cases} x=-2\cos\theta \\ y=3\sin\theta \end{cases}$ $(0\le\theta\le 2\pi)$之直角坐標方程式Ⓐ$4x^2+9y^2=36$Ⓑ$4x^2-9y^2=36$Ⓒ$9x^2-4y^2=36$Ⓓ$9x^2+4y^2=36$

7. 橢圓$9x^2+16y^2-18x+96y+9=0$的中心在第幾象限內Ⓐ第一象限 Ⓑ第二象限 Ⓒ第三象限 Ⓓ第四象限

8. 二元二次方程式$9x^2+16y^2+54x-32y-47=0$之圖形為Ⓐ圓 Ⓑ拋物線 Ⓒ橢圓 Ⓓ雙曲線

9. 橢圓$4x^2+9y^2+8x-18y-23=0$的兩焦點為$F_1{}'F_2$，且為橢圓上之點，則$\overline{PF_1}+\overline{PF_2}$=Ⓐ$2\sqrt{13}$Ⓑ$2\sqrt{13}$Ⓒ4Ⓓ6

10. 設P(x, y)為平面上之點且滿足$25x^2+16y^2+100x-193y276=0$，則點(-2, 1)至P之距離之最小值為Ⓐ0Ⓑ1Ⓒ2Ⓓ3

～解答～

自我挑戰

1. $\dfrac{(x+2)^2}{25}+\dfrac{(y-1)^2}{9}=1$

2. $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$

3. 中心$(-3,1)$，頂點$(-3\pm 4,1)$, 焦點$(-3\pm 2\sqrt{3},1)$, 準線

$x=-3\pm\dfrac{16}{2\sqrt{3}}$, 長軸長 8, 正焦弦長 2, 離心率 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

4. 中心$(-2,-1)$，頂點$(-3\pm 4,1)$, 焦點$(-2,-1\pm 1)$, 準線 $y=-1\pm 3$,

長軸長 $2\sqrt{3}$, 短軸長 $2\sqrt{2}$ ，正焦弦長 $\dfrac{4}{\sqrt{3}}$, 離心率 $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

5. $\dfrac{(x+2)^2}{25}+\dfrac{(y-2)^2}{34}=1$

6. $\dfrac{(x-3)^2}{9}+\dfrac{(y+1)^2}{4}=1$

7. 3<k<5

8. 5/2<k<4

9. $\dfrac{(x+2)^2}{25}+\dfrac{(y+2)^2}{9}=1$

10. $\dfrac{(x-1)^2}{25}+\dfrac{(y+2)^2}{9}=1$

作業研究

1Ⓑ2Ⓒ3Ⓑ4Ⓐ5Ⓒ6Ⓓ7Ⓓ8Ⓒ9Ⓓ10Ⓑ

主題三 雙曲線

定義：1. 在平面上，相異兩定點 F 及 F’，及一定長 2a，其中 $0<2a<\overline{FF'}$，若 $\left|\overline{PF}-\overline{PF'}\right|=2a$ 時，則 P 所成之圖形稱為雙曲線，又 F 及 F’ 稱為雙曲線之兩個焦點。而 2a 稱為雙曲線之貫軸長。

2. 標準式：$\left(a,b>0,c^2=a^2+b^2\right)$

標準式	$\dfrac{(x-h)^2}{a^2}-\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$	$\dfrac{(y-k)^2}{a^2}-\dfrac{(x-h)^2}{b^2}=1$
類型	左右型	上下型
中心	(h,k)	(h,k)
焦點	$(h\pm c,k)$	$(h,k\pm c)$
頂點	$(h\pm a,k)$	$(h,k\pm a)$
準線	$x=h\pm\dfrac{a^2}{c}$	$y=k\pm\dfrac{a^2}{c}$
貫軸長	2a	2a
共軛軸長	2b	2b
正焦弦長	$\dfrac{2b^2}{a}$	$\dfrac{2b^2}{a}$
離心率	$e=\dfrac{c}{a}$	$e=\dfrac{c}{a}$
漸近線	$\dfrac{x-h}{a}\pm\dfrac{y-k}{b}=1$	$\dfrac{y-k}{a}\pm\dfrac{x-h}{b}=1$

註：雙曲線上任一點到兩點漸近線之距離的乘積為定值

$$\frac{a^2b^2}{c^2}=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$

3. 等軸雙曲線：

(1)定義：貫軸長＝共軛軸長。

(2)特性：漸近線互相垂直。

(3)e＝$\frac{c}{a}=\sqrt{2}$

4. 共軛雙曲線：

(1)定義：一雙曲線之貫軸、共軛軸，為另一雙曲線之共軛軸、貫軸，此兩

組雙曲線稱之。

(2)同中心，焦距c，漸近線均相同。

(3)$\frac{1}{e_1^2}+\frac{1}{e_2^2}=1$

5.已知漸近線求雙曲線方程式：

以$a_1x+b_1y+c_1=0$與$a_2x+b_2y+c_2=0$為漸近線的雙曲線可令為

$(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)=k \quad (k\neq 0)$

老師解析

試求在平面上到兩定點(-3,1),(7,1)距離差之絕對值為8之所有動點P(x,y)所形成之軌跡方程式

試求雙曲線$16x^2-9y^2-64x-18y+89=0$之中心、頂點、焦點、準線、貫軸長、共軛軸長、正焦弦長、離心率及漸近線

自我挑戰

1. 試求在平面上到兩定點(0,-1),(0,7)距離差之絕對值為6之所有動點P(x,y)所形成之軌跡方程式
2. 試求在平面上到兩定點(0,13),(0,-13)距離差之絕對值為24之所有動點P(x,y)所形成之軌跡方程式

試求下列各雙曲線之中心、頂點、焦點、準線、貫軸長、共軛軸長、正焦弦長、離心率及漸近線

3. $9x^2-4y^2-18x+16y-43=0$
4. $x^2-9y^2-2x-36y-26=0$

已知一雙曲線之中心為(6,4)，一頂點為(6,8)，共軛軸長為 6，試求此雙曲線之方程式

5. 已知一雙曲線之中心為(1,-2)，一焦點為(-4,-2)，貫軸長為 6，試求此雙曲線之方程式
6. 已知一雙曲線之貫軸二端點為(5,3)及(13,3)，一焦點為(15,3)，試求此雙曲線之方程式

設一雙曲線過點(5,2)且兩漸近線為 $x+2y-5=0$ 及 $x-2y+3=0$，試求此雙曲線方程式

7. 設一雙曲線過點(-1,2)且兩漸近線為 $3x+2y=0$ 及 $3x-2y+3=0$，試求此雙曲線方程式
8. 設一雙曲線過點(1,4)且兩漸近線為 $3x+2y-5=0$ 及 $3x-2y=0$，試求此雙曲線方程式

.

作業研究

1. 已知一雙曲線的二漸近線為 y=-3x 及 y=3x，一頂點為(2,0)，則此雙曲線方程式為Ⓐ$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{36}=1$ Ⓑ$\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{4}=1$ Ⓒ$\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{36}=1$ Ⓓ$\frac{y^2}{36}-\frac{x^2}{4}=1$

2. 求平面上原點(0,0)至雙曲線$y^2=x^2-4x+10$的最短距離為Ⓐ1 Ⓑ$\sqrt{2}$ Ⓒ2 Ⓓ$2\sqrt{2}$

3. 方程式$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$之圖形為雙曲線，下列敘述何者錯誤Ⓐ中心為(0,0) Ⓑ貫軸長 8 Ⓒ頂點為(±3,0) Ⓓ焦點為(±5,0)

4. 雙曲線$3x^2-2y^2-12x-12y-24=0$的共軛軸長為Ⓐ18 Ⓑ15 Ⓒ9 Ⓓ6

5. $25x^2-144y^2+3600=0$兩焦點距離為Ⓐ10 Ⓑ12 Ⓒ15 Ⓓ26

6. 已知雙曲線兩焦點為(-1,0),(9,0),貫軸長為 6,則共軛軸長為Ⓐ4 Ⓑ6 Ⓒ8 Ⓓ10

7. 雙曲線$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$之漸近線方程式為Ⓐ2x±y=0 Ⓑ3x±2y=0 Ⓒ2x±3y=0 Ⓓ9x±4y=0

8. 以 2x+y=0,2x-y=0 為漸近線，且過點(-5,8)之雙曲線方程式為Ⓐ$2x^2-y^2=16$ Ⓑ$2x^2-y^2=-16$ Ⓒ $x^2-4y^2=64$ Ⓓ$4x^2-y^2=36$

～解答～

自我挑戰

1. $\frac{(y-3)^2}{9}-\frac{x^2}{7}=1$

2. $\frac{y^2}{144}-\frac{x^2}{25}=1$

3. 中心(1, 2)，頂點$(1\pm 2, 2)$, 焦點$(1\pm\sqrt{13}, 2)$, 準線$x=1\pm\frac{4}{\sqrt{13}}$,

貫軸長 4, 共軛軸長 6，正焦弦長 9, 離心率$\frac{\sqrt{13}}{2}$，漸近線

$\frac{x-1}{2}\pm\frac{y-2}{3}=0$

4. 中心(1, −2)，頂點$(1, -2\pm 1)$, 焦點$(1, -2\pm\sqrt{10})$, 準線

$y=-2\pm\frac{1}{\sqrt{10}}$, 貫軸長 2, 共軛軸長 6，正焦弦長 18, 離心率$\sqrt{10}$，

漸近線$(y-2)\pm\frac{x-1}{3}=0$

5. $\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{16}=1$

6. $\frac{(x-9)^2}{16}+\frac{(y-3)^2}{20}=1$

7. $9x^2-4y^2-6x+16y-31=0$

8. $9x^2-4y^2+55=0$

作業研究

1Ⓐ2Ⓓ3Ⓑ4Ⓓ5Ⓓ6Ⓒ7Ⓒ8Ⓓ

重點回顧

拋物線

1. 定義：1 設 L 是一定直線，F 是不在 L 上的一點，則在包含 L 與 F 的平面上，至 F 與 L 等距離的所有點所形成的圖形，稱為以 F 為焦點，L 為準線的拋物線

2. 標準式：

標準式	$(y-k)^2=4c(x-h)$	$(x-h)^2=4c(y-k)$
類型	左右型	上下型
中心	(h,k)	(h,k)
焦點	$(h+c,k)$	$(h,k+c)$
準線	$x-h+c=0$	$y-k+c=0$
對稱軸	y-k=0	x-h=0
焦距	$\|c\|$	$\|c\|$
正焦弦長	$\|4c\|$	$\|4c\|$
離心率	1	1
圖形開口	c>0, 向右 c<0, 向左	c>0, 向上 c<0, 向下

(1)向左或向右開口⇒$(y-k)^2=4c(x-h)$

c＞0 向右，c＜0 向左

頂點(h, k)，焦點(h+c, k)，正焦弦長 4｜c｜

準線：x－h+c＝0，對稱軸：y－k=0

(2)向上或向下開口⇒$(x-h)^2=4c(y-k)$

c＞0 向上，c＜0 向下

頂點(h, k)，焦點(h, k+c)，正焦弦長 4｜c｜

準線 y－k+c＝0，對稱軸 x－h＝0

4. 一般式：

(1)軸平行 x 軸：$x=ay^2+by+c$

(2)軸平行 y 軸：$y=ax^2+bx+c$

橢圓

1.定義：在同一平面上到兩定點 F 及 F’之距離和為定數 $2a(2a>\overline{FF'})$ 之所以動點 P 所以形成之圖形稱為橢圓，兩定點 F 及 F’稱為焦點

(1) $\overline{PF}+\overline{PF'}>\overline{FF'}$＝圖形為橢圓

(2) $\overline{PF}+\overline{PF'}=\overline{FF'}$＝圖形為線段

(3) $\overline{PF}+\overline{PF'}<\overline{FF'}$＝無圖形

2.標準式：$\left(a>b>0, c^2=a^2-b^2\right)$

標準式	$\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$	$\dfrac{(x-h)^2}{b^2}+\dfrac{(y-k)^2}{a^2}=1$
中心	(h,k)	(h,k)

焦點	$(h\pm c,k)$	$(h,k\pm c)$
長軸頂點	$(h\pm a,k)$	$(h,k\pm a)$
短軸頂點	$(h,k\pm b)$	$(h\pm b,k)$
準線	$x=h\pm\frac{a^2}{c}$	$y=k\pm\frac{a^2}{c}$
長軸長	2a	2a
短軸長	2b	2b
正焦弦長	$\frac{2b^2}{a}$	$\frac{2b^2}{a}$
離心率	$e=\frac{c}{a}$	$e=\frac{c}{a}$

3.參數式：

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1\Rightarrow\begin{cases}x=h+a\cos\theta\\ y=k+b\sin\theta\end{cases}(0\le\theta<2\pi)$$

4 橢圓內之幾何度量

(1)橢圓之面積$=ab\pi$

(2)內接正方形面積$=\frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}$，

周長$=\frac{8ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$

(3)內接矩形面積最大$2ab$，周長

$4\sqrt{a^2+b^2}$

5. 參數式：

(1)躺著：

$$\begin{cases}x=h+a\cos\theta\\ y=k+b\sin\theta\end{cases}(0\le\theta<2\pi)$$

(2)站著：

$$\begin{cases}x=h+b\cos\theta\\ y=k+a\sin\theta\end{cases}(0\le\theta<2\pi)$$

6.性質：

(1)橢圓內接矩形最大面積：2ab　(2)橢圓面積：πab

(3)外切最小矩形面積：4ab　　(4)內接正方形面積：$\dfrac{4a^2b^2}{a^2+b^2}$

(5)內接最大三角形面積：

$\dfrac{3\sqrt{3}}{4}ab$

雙曲線

定義：1. 在平面上，相異兩定點 F 及 F’，及一定長 2a，其中 $0<2a<\overline{FF'}$，若 $\left|\overline{PF}-\overline{PF'}\right|=2a$ 時，則 P 所成之圖形稱為雙曲線，又 F 及 F’稱為雙曲線之兩個焦點。而 2a 稱為雙曲線之貫軸長。

2. 標準式：$(a,b>0,c^2=a^2+b^2)$

標準式	$\dfrac{(x-h)^2}{a^2}-\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$	$\dfrac{(y-k)^2}{a^2}-\dfrac{(x-h)^2}{b^2}=1$
類型	左右型	上下型
中心	(h,k)	(h,k)
焦點	$(h\pm c,k)$	$(h,k\pm c)$
頂點	$(h\pm a,k)$	$(h,k\pm a)$
準線	$x=h\pm\dfrac{a^2}{c}$	$y=k\pm\dfrac{a^2}{c}$
貫軸長	2a	2a
共軛軸長	2b	2b
正焦弦長	$\dfrac{2b^2}{a}$	$\dfrac{2b^2}{a}$
離心率	$e=\dfrac{c}{a}$	$e=\dfrac{c}{a}$

漸近線	$\dfrac{x-h}{a}\pm\dfrac{y-k}{b}=1$	$\dfrac{y-k}{a}\pm\dfrac{x-h}{b}=1$

註：雙曲線上任一點到兩點漸近線之距離的乘積為定值

$$\frac{a^2b^2}{c^2}=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$

3. 等軸雙曲線：

(1)定義：貫軸長＝共軛軸長。 (2)特性：漸近線互相垂直。

(3)e＝$\dfrac{c}{a}=\sqrt{2}$

4. 共軛雙曲線：

(1)定義：一雙曲線之貫軸、共軛軸，為另一雙曲線之共軛軸、貫軸，此兩組雙曲線稱之。

(2)同中心，焦距c，漸近線均相同。

(3)$\dfrac{1}{e_1^{\,2}}+\dfrac{1}{e_2^{\,2}}=1$

5. 已知漸近線求雙曲線方程式：

以 $a_1x+b_1y+c_1=0$ 與 $a_2x+b_2y+c_2=0$ 為漸近線的雙曲線可令為

$(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)=k \quad (k\neq 0)$

歷屆試題

1. 試問在坐標平面上，曲線$y^2=4x$與$x+y+2=0$之間的最短距離為何？　(A)$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　(B)1　(C)$\sqrt{2}$　(D)2。(95)

2. 下列何者為曲線$4y^2=(2x+1)^2+9$的漸近線？　(A)$y=x+\dfrac{1}{2}$　(B)$y=2x-1$　(C)$y=2x+1$　(D)$2y=x+\dfrac{1}{2}$。(95)

3. 在坐標平面上，若將二次曲線$(x+1)^2=4y$向x軸正方向平移2，再向y軸正方向平移1，則平移後的方程式為何？
(A)$(x+3)^2=4(y+1)$　(B)$(x-1)^2=4(y-1)$　(C)$(x+1)^2=4y-1$
(D)$(x-3)^2=4y+1$。(94)

4. 若$f(x)=x^3+3x^2-9x-10$的相對極大值為M，相對極小值為m，則$M-m=$？　(A)2　(B)15　(C)17　(D)32。(94)

5. 已知A($\frac{15}{4}$, 3)為雙曲線$16x^2-9y^2=144$上一點，若P與Q為此雙曲線的兩焦點，則$|\overline{AP}-\overline{AQ}|=$？　(A)6　(B)8　(C)10　(D)$2\sqrt{41}$。(93)

6. 若x、y均為實數，且$\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x-7)^2+(y-1)^2}=10$，則(x, y)恆滿足下列那一個方程式？　(A)$\dfrac{(x-4)^2}{16}-\dfrac{(y-1)^2}{25}=1$　(B)$\dfrac{(x-4)^2}{25}-\dfrac{(y-1)^2}{9}=1$　(C)$\dfrac{(x-4)^2}{25}+\dfrac{(y-1)^2}{16}=1$　(D)$\dfrac{(x-4)^2}{16}+\dfrac{(y-1)^2}{9}=1$。(91)

7. 已知點A(5, 6)在拋物線$(x-1)^2=4(y-2)$上，則點A與此拋物

線之焦點的距離為何？ (A)2 (B)3 (C)4 (D)5。(93)

8. 求橢圓 $9x^2+5y^2+18x-20y-16=0$ 的長軸長為何？ (A)4 (B)5 (C)6 (D)9。(93)

9. 設 A、B 為橢圓之 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ 兩焦點，P 為此橢圓上之任一點，則△PAB 面積的最大值為(A)6(B)12(C)15(D)20 (92)

10. 若雙曲線的兩焦點為(-4,0)，(6,0)及一頂點為(4,0)則下列哪一點在此雙曲線上(A)$\left(-\frac{11}{4},3\right)$(B) $\left(\frac{17}{4},4\right)$ (C)(5,5)(D) $\left(\frac{11}{2},6\right)$ (92)

11. 設拋物線 $y=x^2+bx+c$ 的頂點坐標為()2,1，則

$b+2c=$(A)2(B)6(C)8(D)10

【85 保甄】

12. 橢圓 $4x^2+9y^2-16x+54y+61=0$ 的中心至直線 $3x+4y-9=0$ 的距離等於

(A)3/5(B)9/5(C)2(D)3

【85 保甄】

13. 方程式 $x^2-4x+12y+4=0$ 之圖形為(A)直線(B)拋物線(C)橢圓(D)雙曲線

【85 日工】

14. 曲線 $x^2+y=2$ 在點(2,-2)的切線方程式為

(A)x-4y=10(B)4x-y=10(C)x+4y=-6

(D)4x+y=6

【85 日商】

15.一橢圓方程式為$3x^2+y^2+6x-2y-5=0$，則其長軸等於

(A)$2\sqrt{3}$(B)6(C)$\sqrt{2}$(D) $2\sqrt{6}$

【86 保甄】

16 關於拋物線$y=(x-1)^2+2$之圖形，下列何者正確(A)圖形開口朝下(B)圖形對稱於直線 x=1(C)圖形 y 坐標之最大可能值為-1(D)圖形 x 坐標之最大可能值為 8　　　【86 日工】

17.雙曲線$4x^2-y^2-16x-8y=16$，求正焦弦長

(A)16(B)2(C)1/16(D)1/2 【87 保甄工】

18.拋物線$x^2+2x+4y+1=0$在其上一點(1,-1)之切線方程式為

(A)4x+y=3 (B)x+y=0(C)x+4y=-3(D)y-x=2

【87 保甄商】

19.考慮拋物線$y=-2x^2+3$，則下列何者錯誤(A)此圖形開口向下(B)此圖形之頂點坐標為(0,3)(C)通過此圖形頂點之切線為水平線(D)此函數之最小值為 3

【87 日工】

20.橢圓方程式為$9x^2+25y^2-18x+100y-116=0$，試問此橢圓之長軸之長度為(A)6 (B)10(C)15(D)20

【88 推甄】

21.拋物線$y=-x^2-4x+8$之頂點至點(3,0)之距離

(A)10(B)11(C)12(D)13【88 日工】

22.設拋物線$y=x^2$與直線 y=2x+3 相交於 P,Q 兩點，則$\overline{PQ}$之中點

至直線 3x+4y-3=0 之距離為(A)4(B)5(C)6(D)7

【88 日工】

23. 已知橢圓方程式為 $x^2+4y^2+6x+8y+4=0$，則此橢圓之長軸及短軸之和為(A)9(B)18(C)7(D)6(E)5

【89 推甄工】

24. 拋物線 $y^2+12x=0$ 之焦坐標為

(A)(-3,0)(B)(3,0)(C)(0,3)(D)(0,-3)

(E)(0,0)

【89 推甄工】

25. 若拋物線 $y=x^2-2x-3$ 的頂點為 A，且與 x 軸的交點為 B 與 C，則△ABC 的面積為(A)12(B)8(C)6(D)4

【89 日工】

～解答～

歷屆試題：

1. Ⓐ 2. Ⓐ 3. Ⓑ 4. Ⓓ 5. Ⓐ 6. Ⓒ 7. Ⓓ 8. Ⓒ 9. Ⓑ 10. Ⓐ
11. Ⓑ 12. Ⓓ 13. Ⓑ 14. Ⓓ 15. Ⓑ 16. Ⓑ 17. Ⓐ 18. Ⓑ 19. Ⓓ 20. Ⓑ
21. Ⓓ 22. Ⓐ 23. Ⓐ 24. Ⓐ 25. Ⓐ