

3

- 圓方程式
- 圓與直線之關係
- 圓之切線方程式
- 重點回顧
- 歷屆試題

主題一 圓方程式

1. 定義：在同一平面上，到定點的距離為定值得所有點所成的集合稱為圓，此定點稱為圓心，定長稱為半徑。

2. 圓方程式：

(1) 標準式：圓心為 (h, k) ，半徑為 r ，圓方程式為

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

(2) 一般式： $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

a. 當 $D^2 + E^2 - 4F > 0$ 時為一實圓，圓心為

$$\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right), \text{ 半徑 } r = \frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}}{2}$$

b. 當 $D^2 + E^2 - 4F = 0$ 時為一點圓或稱退化圓(一

$$\text{點}), \text{ 點座標為 } \left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$$

c. 當 $D^2 + E^2 - 4F < 0$ 時為一虛圓(無圖形)

(3) 直徑式：直徑兩端點座標為 $A(x_1, y_1)$ 與 $B(x_2, y_2)$ ，圓方程式為 $(x, x_1)(x, x_2) + (y, y_1)(y, y_2) = 0$

(4) 參數式：圓心為 (h, k) ，半徑為 r ，圓方程式為

$$\begin{cases} x = h + r \cos t \\ y = k + r \sin t \end{cases}, 0 \leq t < 2\pi$$

教師解析

試求過點 $(-1,3)$ 且圓心為 $(2,-1)$ 之圓方程式。

解：

自我挑戰

1. 試求圓心為 $(-1,-2)$ ，半徑為4之圓方程式。
2. 試求以 $(-1,2)$ ， $(3,-4)$ 為直徑兩端點之圓方程式。

試求通過 $(-1,2), (0,0), (3,-2)$ 之圓
方程式。

解：

3. 試求通過
 $(-2,0), (-1,1), (-2,2)$ 之圓方
程式。

4. 試求通過 $(0,0), (2,0), (0,4)$
之圓方程式。

試求圓 $3x^2 + 3y^2 - 6x + 6y - 2 = 0$ 之
圓心座標及半徑。

解：

5. 已知圓

$$2x^2 + 2y^2 + 4x + 6y + k = 0$$

之半徑為 $\frac{3}{2}$ ，試求 k 之值。

6. 已知圓

$$2x^2 + 2y^2 + 6x - 4y - k = 0$$

之半徑為 2，試求 k 之值。

已知方程式

$$x^2 + y^2 + kx + 2y + k + 1 = 0 \text{ 之圓形}$$

為一實圓，試求實數 k 之範圍。

解：

7. 已知方程式

$$x^2 + y^2 + 2kx - 2y + 5 = 0 \text{ 之}$$

圓形為一點圓，試求實數 k
之範圍。

8. 已知方程式

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + k = 0 \text{ 之}$$

圓形為一虛圓，試求實數 k
之範圍。

試求圓 $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$ 之參數方程式。

解：

求過 $(1,3)$ 、 $(-1,1)$ 且圓心在 x 軸上之圓？

解：

9. 已知圓之參數方程式為

$$\begin{cases} x = -1 + 3 \cos t \\ y = 2 + 3 \sin t \end{cases}, 0 \leq t < 2\pi,$$

試求此圓之直角座標方程式。

10. 已知動點 $P(x,y)$ 的參數方程式為

$$\begin{cases} x = \sin t + \cos t - 2 \\ y = \sin t - \cos t + 1 \end{cases}, t \in R,$$

試求動點 P 之軌跡的直角座標方程式。

11. 一圓過 $(2,3)$ 、 $(-1,2)$ 且圓心在 y 軸上，求其方程式？

12. 求過 $(-2,2)$ 、 $(1,-1)$ 且圓心在 $x - 2y = 0$ 上之圓？

作業研究

- 已知一圓過點(2,3)，圓心為 $x + y - 2 = 0$ 與 $2x - y - 10 = 0$ 的交點，則此圓的半徑等於Ⓐ $\sqrt{29}$ Ⓑ $2\sqrt{29}$ Ⓒ $\sqrt{37}$ Ⓓ $2\sqrt{37}$ 。
- 圓方程式 $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$ 通過三點(-1,2)，(0,0)，(3,-2)，則Ⓐ $d = 9, e = 7$ Ⓑ $d = -9, e = 7$ Ⓒ $d = 9, e = -7$ Ⓓ $d = -9, e = -7$ 。
- 下述答案中，何者不是圓？Ⓐ $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 13$ Ⓑ $x^2 + y^2 - 5 = 0$ Ⓒ $\begin{cases} x = 3 + 2\cos\theta \\ y = 3 + 2\sin\theta \end{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi$ Ⓓ $\begin{cases} x = 3 + 3\cos\theta \\ y = 2 + 2\sin\theta \end{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi$ 。
- 圓 $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 23 = 0$ 的圓心與點(8,5)的距離等於Ⓐ $2\sqrt{10}$ Ⓑ 8 Ⓒ 10 Ⓓ $2\sqrt{26}$ 。
- 圓 $4x^2 + 4y^2 + 8x - 16y - 5 = 0$ 的圓心為Ⓐ (1,-2) Ⓑ (-1,-2) Ⓒ (-1,2) Ⓓ (1,2) Ⓔ (2,-4)。
- 在平面上有三直線 $L_1: 3x - 2y = 7$ ， $L_2: 6x + y = 4$ ， $L_3: x + y = 4$ 圍成一個三角形，則此三角形的外接圓方程式為Ⓐ $x^2 + y^2 + x - 9y - 44 = 0$ Ⓑ $5x^2 + 5y^2 + x - 9y - 44 = 0$ Ⓒ $x^2 + y^2 + 5x - 9y + 44 = 0$ Ⓓ $5x^2 + 5y^2 - x + 9y - 44 = 0$ 。
- 設 k 為實數，若方程式 $x^2 + y^2 + 2kx - 2y + 5 = 0$ 的圖形表一圓，則 k 的範圍在Ⓐ $k > 2$ 或 $k < -2$ Ⓑ $-2 < k < 2$ Ⓒ $k < -2$ Ⓓ $k > -2$ 。
- 圓 $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 15 = 0$ 的半徑等於Ⓐ 4 Ⓑ 5 Ⓒ 6 Ⓓ 7 Ⓔ 8。
- 動點 $P(x, y)$ 的參數方程式為 $x = \sin t + \cos t - 2$ ， $y = \sin t - \cos t + 1$ ， $t \in R$ ，則動點 P 之軌跡方程式是Ⓐ $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 2$ Ⓑ $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 1$ Ⓒ $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 0$ Ⓓ $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 2$ 。
- 若一圓之方程式為 $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 5 = 0$ ，則該圓之半徑

為Ⓐ8Ⓑ $2\sqrt{2}$ Ⓒ3Ⓓ2Ⓔ $\sqrt{6}$

11. 若 $x^2 + y^2 + 4x + ky + 1 - 2k = 0$ 為一點，求 k ？
12. 若 $2x^2 + 2y^2 - 4x + 6y + k = 0$ 之半徑為 1，求 k ？
13. 以 (5,3) 為圓心，5 為半徑之圓為 $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$ ，求 $d + e + f = ?$
14. 求 $x^2 + y^2 - 6x + 10y + 3 = 0$ 之圓心、半徑與圓面積？
15. $x^2 + y^2 + 2kx - 6y + (k^2 + k + 1) = 0$ 為一點，則此點為？
16. 求 $\begin{cases} x = -2 + 3 \cos\theta \\ y = 5 + 3 \sin\theta \end{cases} \quad 0 \leq \theta < 2\pi$ 之圓心與半徑？
17. 化 $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$ 為參數式。
18. $P(x, y)$ 為 $x^2 + y^2 = 4$ 上一點，求 $2x + 3y$ 之極值？
19. $Q(x, y)$ 為 $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$ 上一動點，求 $x + 2y$ 之極值？
20. 求與 $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$ 同圓心且過 (3,5) 之圓方程式？

～解答～

自我挑戰：

1. $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 16$
2. $(x+1)(x-3) + (y-2)(y+4) = 0$
3. $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 4 = 0$
4. $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$
5. 2
6. $\frac{3}{2}$
7. ± 2
8. $k > 5$
9. $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 9$
10. $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 2$
11. $x^2 + (y-4)^2 = 5$
12. $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 9$

作業研究：1. ① 2. ① 3. ① 4. ③ 5. ③ 6. ② 7. ① 8. ②

9. ① 10. ② 11. $K = -2, -6$ 12. $K = \frac{9}{2}$ 13. -7

14. 圓心 $(3, -5)$, $r = \sqrt{31}$, 面積 31π

15. $(-8, 3)$

16. 圓心 $(-2, 5)$, $r = 3$

$$17. \begin{cases} x = 3 + 3\cos\theta \\ Y = -1 + 3\sin\theta \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

18. $\max 2\sqrt{13}$, $\min -2\sqrt{13}$

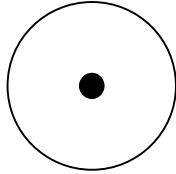
19. $\max 1 + \sqrt{20}$, $\min 1 - \sqrt{20}$

20. $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$

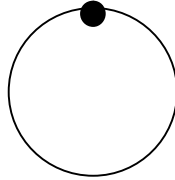
主題二 圓與直線之關係

1. 圓與點之關係

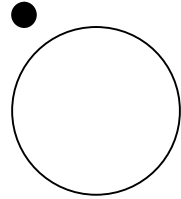
圓內一點



圓上一點



圓外一點



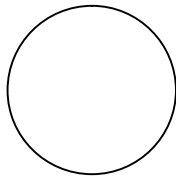
平面上一點 $P(x_0, y_0)$ 及圓 $C: x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$,

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + Dx + Ey + F$$

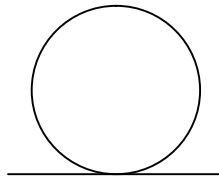
$f(x_0, y_0)$	< 0	$= 0$	> 0
$P(x_0, y_0)$	在圓內	在圓上	在圓外

2. 圓與直線之關係

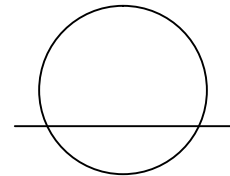
相離



相切



相割



(1) 圓 $C: (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ 之圓心與直線

$$L: ax + by + c = 0 \text{ 之距離 } d = \frac{|ah + bk + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

- 相離 $\Leftrightarrow d > r \Leftrightarrow$ 圓與直線不相交
- 相切 $\Leftrightarrow d = r \Leftrightarrow$ 圓與直線不相交於一點
- 相割 $\Leftrightarrow d < r \Leftrightarrow$ 圓與直線相交於兩點

(2) 化簡消去 y , 得 x 之一元二次方程式 $Ax^2 + Bx + C = 0$ (或

化簡消去 x ，得 y 之一元二次方程式 $Ay^2 + By + C = 0$ ，判別式 $\delta = B^2 - 4AC$

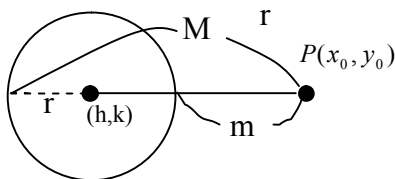
- a. 相離 $\Leftrightarrow \delta < 0 \Leftrightarrow$ 圓與直線不相交
- b. 相切 $\Leftrightarrow \delta = 0 \Leftrightarrow$ 圓與直線不相交於一點
- c. 相割 $\Leftrightarrow \delta > 0 \Leftrightarrow$ 圓與直線相交於兩點

3. 點、直線與圓之距離

(1) 圓外一點 $P(x_0, y_0)$ 與圓 $C : (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ ，圓心

與 P 之距離 $d = \sqrt{(x_0 - h)^2 + (y_0 - k)^2}$

- a. 最長距離 $M = d + r$
- b. 最短距離 $m = d - r$
- c. $M + m = 2d$
- d. $M - m = 2r$

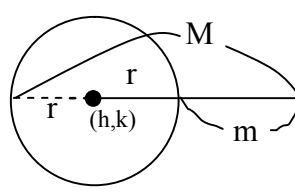


(2) 圓外一直線 $L : ax + by + c = 0$ 與圓

$C : (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ ，圓心到直線之距離

$$d = \left| \frac{ah + bk + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

- a. 最長距離 $M = d + r$
- b. 最短距離 $m = d - r$
- c. $M + m = 2d$
- d. $M - m = 2r$



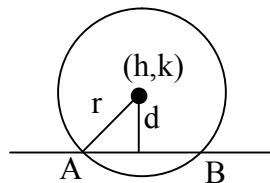
(3) 弦心距與弦長

圓 $C : (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ 與直線 $L : ax + by + c = 0$ 相交於 A、B

兩點

a. 弦心距 $\overline{OM} = d = \left| \frac{ah + bk + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$

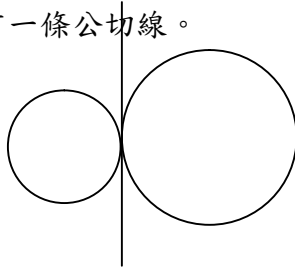
b. 弦 $\overline{AB} = 2r\sqrt{r^2 - d^2}$



4. 已知兩圓的圓心與半徑分別為 O_1 、 O_2 與 r_1 、 r_2

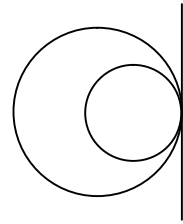
(1) 兩圓相切：

① 當 $\overline{O_1O_2} = r_1 + r_2$ 時，表示兩圓外切兩圓有一條公切線。



【外切】

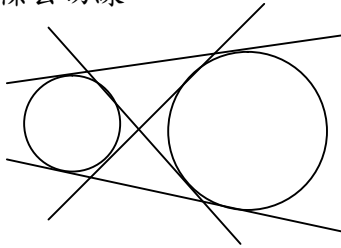
② 當 $\overline{O_1O_2} = |r_1 - r_2|$ 時，表示兩圓有一條公切線。



【內切】

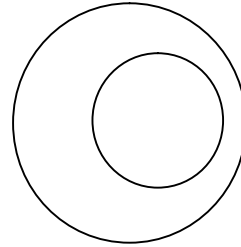
(2) 兩圓相離：

① 當 $\overline{O_1O_2} > r_1 + r_2$ 時，表示兩圓外離兩圓有四條公切線。



【外離】

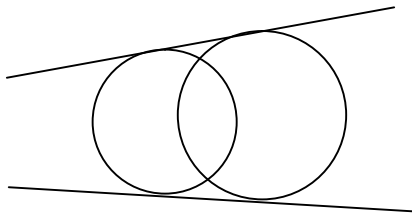
② 當 $0 < \overline{O_1O_2} < |r_1 - r_2|$ 時，內離兩圓沒有公切線。



【內離】

(3) 兩圓相割：

① 當 $|r_1 - r_2| < \overline{O_1O_2} < r_1 + r_2$ 時，表示兩圓相割，兩圓有兩條公切線。



【相割】

教師解析

設圓方程式：

$(x-4)^2 + (y+1)^2 = 18$ ，試判別點 $(-2,-4)$ 在圓之外部、內部或圓上？

解：

若點 $(-1,3)$ 在圓

$x^2 + y^2 + 2x - 4y + a = 0$ 之外部，求 a 之範圍？

解：

自我挑戰

1. 設圓方程式：

$x^2 + y^2 = 17$ ，試判別點 $(1,-4)$ 在圓之外部、內部或圓上？

2. 設圓方程式：

$(x+4)^2 + (y-1)^2 = 1$ ，試判別點 $(-4,1)$ 在圓之外部、內部或圓上？

3. 若點 $(1,a)$ 在圓

$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 8$ 之內部，求 a 之範圍？

4. 若點 $(k,1)$ 在

$x^2 + y^2 - 2x - 6y + 2 = 0$ 之上，求 k ？

試判別直線 $L: x + 2y + 9 = 0$ 與圓 $x^2 + y^2 + 2x + 3y + 1 = 0$ 之相交情形。

解：

試求圓心為原點，且與直線 $x - \sqrt{3}y = 4$ 相切的圓方程式。

解：

5. 試判別直線 $L: x - y - 1 = 0$ 與圓 $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ 之相交情形。

6. 試判別直線

$L: 3x + 4y + k = 0$ 與圓

$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$ 之相交情形。

7. 試求圓心為 $(1,1)$ ，且與直線 $x + y - 4 = 0$ 相切的圓方程式。

8. 試求圓心為原點，且與直線 $x - y + 2 = 0$ 相切的圓方程式。

直線 $x + y - 3 = 0$ 截圓
 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ 於 A、B 兩點，
試求弦 \overline{AB} 之長。

解：

試求點 $(3, -1)$ 至圓
 $x^2 + y^2 + 4x - 4y - 1 = 0$ 之最遠距
離與最近距離。

解：

9. 圓 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$
與直線 $3x + 4y - 5 = 0$ 相交於
A、B 兩點，試求弦 \overline{AB} 之長。

10. 圓 $x^2 + y^2 = 25$ 與直線
 $x + y + 5 = 0$ 相交於 A、B 兩點，
試求弦 \overline{AB} 之長。

11. 試求點 $(4, 3)$ 至圓
 $x^2 + y^2 = 3$ 之最遠距離與最近
距離。

12. 試求點 $(4, 2)$ 至圓
 $x^2 + y^2 = 4$ 之最遠距離與最近
距離。

試求圓 $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$ 上之動點 $P(x, y)$ 到直線 $3x + 4y + 7 = 0$ 之最長距離與最短距離。

解：

13. 試求圓 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$ 上之動點 $P(x, y)$ 到直線 $3x + 4y + 14 = 0$ 之最長距離與最短距離。

14. 試求圓 $x^2 + y^2 = 5$ 上之動點 $P(x, y)$ 到直線 $3x + 4y + 15 = 0$ 之最長距離與最短距離。

試求兩圓

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 95 = 0 \text{ 及}$$

$$x^2 + y^2 - 8x - 12y + 48 = 0 \text{ 之關}$$

係。

解：

15. 兩圓同心， $x^2 + y^2 = 1$ 與
 $x^2 + y^2 = 2$ 所圍區域面積？

16. 求兩圓

$$x^2 + y^2 - 6x - 2y + 1 = 0 \text{ 與}$$

$$x^2 + y^2 + 4x + 3 = 0 \text{ 之內公切}$$

線段長與外公切線段長？

作業研究

1. 平面上圓 $C: (x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$ 與直線 $L: 3x+4y+5=0$ 的交點為 A 和 B，設圓 C 的圓心為 O，則三角形 O A B 之面積為 ① 8 ② 12 ③ 16 ④ 20 ⑤ 24。
2. 設圓 $x^2 + y^2 = 25$ 與直線 $x + y + 5 = 0$ ，交於 A、B 兩點，則 A 與 B 之間的距離為 ① $5\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{5}$ ③ 5 ④ 10。
3. 假設直線 $L: 3x + 4y + 10 = 0$ ，若點 P 在單位圓上移動，假設點 P 與 L 的最長距離為 a，最短距離為 b，則 $a - b$ 等於 ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5。
4. 設直線 $3x + 4y + k = 0$ ($k > 0$) 與圓 $C: x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$ 相切，則 k 之值為 ① 4 ② 10 ③ 20 ④ 26。
5. 茲有一圓 $C: x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$ ，其一弦 \overline{AB} 之中點座標為 (1,1)，則弦 \overline{AB} 之長為 ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 8。
6. 點 (3,1) 至圓 $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 11 = 0$ 的最短距離等於 ① 1 ② 4 ③ 5 ④ 9
7. $3x + 4y + k = 0$ 與 $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$ 恰有兩交點，求 k 之範圍？
8. $x - y + k = 0$ 為 $x^2 + y^2 = 2$ 之切線，則 $k = ?$
9. 圓 $2x^2 + 2y^2 - 8x - 5y + k = 0$ 與 x 軸相切，求 $k = ?$

～解答～

自我挑戰：

1. 圓上
 2. 圓內
 3. $0 < a < 4$
 4. $K=3, -1$
 5. 相割，有兩交點
 6. $-20 < k < 10$
 7. $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$
 8. $x^2 + y^2 = 2$
 9. $2\sqrt{5}$
 10. $5\sqrt{2}$
 11. 最長距離 $5 + \sqrt{3}$ ，最短距離 $5 - \sqrt{3}$
 12. 最長距離 $2\sqrt{5} + 2$ ，最短距離 $2\sqrt{5} - 2$
 13. 最長距離 10，最短距離 0
 14. 最長距離 $3 + \sqrt{5}$ ，最短距離 $3 - \sqrt{5}$
 15. π
 16. 外公切線長 $= \sqrt{30}$ ，內公切線長 $= \sqrt{42}$
- 作業研究：1. ⑥ 2. ① 3. ⑥ 4. ⑥ 5. ③ 6. ①
7. $-10 < k < 20$
8. $K=\pm 2$ 9. $K=4$

主題三 圓之切線方程式

3. 圓之切線方程式

(1) 已知切點 (x_0, y_0) 時……切線恰有一條a. 圓 $C: (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ ，則切線方程式為

$$(x_0 - h)(x - h) + (y_0 - k)(y - k) = r^2$$

b. 圓 $C: x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ ，則切線方程式為

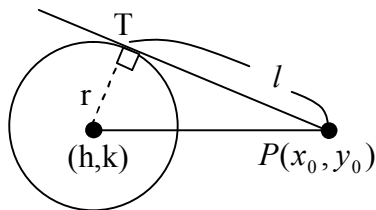
$$x_0x + y_0y + D \times \frac{x + x_0}{2} + E \times \frac{y + y_0}{2} + F = 0$$

(2) 已知圓外一點 (x_0, y_0) 時……切線有兩條a. 設切線方程式為 $y - y_0 = m(x - x_0)$ b. 利用 $d = r$ 或 $\delta = 0$ 求 m 之值☞ 若 m 只有一解，則另一切線為 $x = x_0$ (3) 已知切線率為 m 時……切線有兩條a. 設切線方程式為 $y = mx + b$

4. 切線段長

圓外一點 $P(x_0, y_0)$ 對圓作切線之切線段長 l (1) 圓 $C: (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ ，

$$l = \sqrt{(x_0 - h)^2 + (y_0 - k)^2 - r^2}$$

(2) 圓 $C: x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ ，

$$l = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + Dx_0 + Ey_0 + F}$$

教師解析

試求過圓 $x^2 + y^2 + 4x - 3y + 5 = 0$

上一點 $(-1, 2)$ 之切線方程式。

解：

自我挑戰

1. 試求過圓

$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 34$ 上一點
 $(-1, -2)$ 之切線方程式。

2. 試求過圓

$(x-3)^2 + (y+2)^2 = 25$ 上一點
 $(-1, 1)$ 之切線方程式。

試求過點 $(7, -1)$ 且與圓 $x^2 + y^2 = 25$ 相切之直線方程式。

解：

3. 試求過原點且與圓 $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 8 = 0$ 之直線方程式。

4. 試求過點 $(2, 1)$ 且於圓 $x^2 + y^2 = 1$ 相切之直線方程式。

試求斜率為2且與圓 $x^2 + y^2 = 5$ 相切之直線方程式。

解：

5. 試求斜率為2且與圓 $x^2 + y^2 = 4$ 相切之直線方程式。

6. 試求斜率為-2且與圓 $x^2 + y^2 = 1$ 相切之直線方程式。

試求自點(5,2)到圓 $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 5 = 0$ 所作之線段長。

解：

7. 試求自點(2,1)到圓 $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$ 所作之線段長。

8. 試求自點(1,-3)到圓 $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$ 所作之線段長。

作業研究

- 通過點 $A(4,2)$ 且與圓 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$ 相切的直線
 ① 有相異兩條 ② 方程式為 $4x - 3y = 20$ ③ 方程式為
 $3x + 4y = 20$ ④ 方程式為 $3x - 4y = 20$ ⑤ 方程式為
 $4x + 3y = 20$ 。
- 設直線 $L: y = mx + 2$ 與圓 $C: x^2 + y^2 = 1$ 相切，則 m 值為 ①
 $m < -\sqrt{3}$ 或 $m > \sqrt{3}$ ② $-\sqrt{3} < m < \sqrt{3}$ ③ $m = \sqrt{3}$ ④
 $m = \pm\sqrt{3}$ 。
- $P(2,0)$ 為圓 $x^2 + y^2 - 2x + 6y = 0$ 上一點，則過 p 點的切線
 方程式為 ① $x - 3y - 2 = 0$ ② $x + 3y - 2 = 0$ ③
 $2x - 3y - 4 = 0$ ④ $2x + 3y - 4 = 0$ 。
- 圓 $x^2 + y^2 = 10$ 上一點 $(1,3)$ 的切線斜率等於 ① -3 ② $-\frac{1}{3}$ ③
 1 ④ 3 。
- 若 $L: mx - y + 2 = 0$ 與圓 $C: x^2 + y^2 = 1$ 相切，則 $m =$ ①
 ± 6 ② ± 3 ③ $\pm\sqrt{3}$ ④ ± 1 。
- 點 $P(2,-4)$ 到圓 $C: x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$ 之切線段長為
 ① $\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ 4 ④ $3\sqrt{2}$ 。

～解答～

自我挑戰：

1. $3x + 5y + 13 = 0$

2. $4x - 3y + 7 = 0$

3. $7x + y = 0$, $x - y = 0$

4. $y - 1 = 0$, $4x - 3y - 5 = 0$

5. $y = 2x \pm 2\sqrt{5}$

6. $y = -2x \pm \sqrt{5}$

7. $\sqrt{6}$

8. 5

作業研究：1. ③ 2. ① 3. ⑥ 4. ⑥ 5. ③ 6. ⑥

重點回顧

□ 圓方程式：

◇ 標準式： $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

◇ 一般式： $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

➤ 當 $D^2 + E^2 - 4F > 0$ 時，圖形為一圓(實圓)，圓心為

$$\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right), \text{ 半徑 } r = \frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}}{2}$$

➤ 當 $D^2 + E^2 - 4F = 0$ 時為一點圓或稱退化圓(一點)，

點座標為 $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$

➤ 當 $D^2 + E^2 - 4F < 0$ 時為一虛圓(無圖形)

◇ 直徑式： $(x, x_1)(x, x_2) + (y, y_1)(y, y_2) = 0$

◇ 參數式：
$$\begin{cases} x = h + r \cos \theta \\ y = k + r \sin \theta \end{cases} \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

□ 圓與直線之關係：

圓 $C: (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ 之圓心與直線 $L: ax + by + c = 0$

之距離 $d = \frac{|ah + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

◇ $\Leftrightarrow d > r \Leftrightarrow$ 圓 C 與直線 L 相離(無交點)

◇ $\Leftrightarrow d = r \Leftrightarrow$ 圓 C 與直線 L 相切(交於一點)

◇ $\Leftrightarrow d < r \Leftrightarrow$ 圓 C 與直線 L 相割(交於二點)

☞ 若圓 C 與直線 L 交於 A 、 B 兩點，則弦長

$$\overline{AB} = 2r\sqrt{r^2 - d^2}$$

□ 圓之切線方程式：切點 (x_0, y_0) ，切線之求法

□ $x^2 \rightarrow x_0x \quad y^2 \rightarrow y_0y$

$$x \rightarrow \frac{x+x_0}{2} \quad y \rightarrow \frac{y+y_0}{2}$$

$$(x-h)^2 \rightarrow (x_0-h)(x-h)$$

$$(y-k)^2 \rightarrow (y_0-k)(y-k)$$

□ 切線段長：圓外一點 (x_0, y_0)

$$\diamond \quad l = \sqrt{(x_0-h)^2 + (y_0-k)^2 - r^2}$$

$$\diamond \quad l = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + Dx_0 + Ey_0 + F}$$

歷屆試題

1. 在座標平面上 $(x^2 + y^2 - 4)(x^2 + y^2 - 9) \leq 0$ 所圍的區域面積等於 $\textcircled{A} \pi$ $\textcircled{B} 2\pi$ $\textcircled{C} 3\pi$ $\textcircled{D} 5\pi$ 。

【85 保甄】

2. 設平面上三點 $P(0,0)$ ， $Q(2,0)$ ， $R(0,4)$ ，則通過 P ， Q ， R 三點的圓方程式為 $\textcircled{A} (x+1)^2 + (y+2)^2 = 5$ $\textcircled{B} (x-1)^2 + y^2 = 5$ $\textcircled{C} x^2 + (y-2)^2 = 5$ $\textcircled{D} (x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$ 。

【85 日商】

3. 圓 $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ 之圓心到點 $(4,2)$ 之距離為 $\textcircled{A} 1$ $\textcircled{B} 2$ $\textcircled{C} 3$ $\textcircled{D} 4$ $\textcircled{E} 5$ 。

【85 日工】

4. 下列圓方程式何者與直線 $x + 2y - 5 = 0$ 相切於點 $P(3,1)$ ？
 $\textcircled{A} x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ $\textcircled{B} x^2 + y^2 + 4x - 2y = 20$ $\textcircled{C} x^2 + y^2 - 2x + 4y = 8$ $\textcircled{D} x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$ 。

【85 日商】

5. 通過二圓 $x^2 + y^2 = 9$ ， $(x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 = 4$ 之交點之直

線方程式為 $\textcircled{A} x + y - \frac{9}{2\sqrt{2}} = 0$ $\textcircled{B} x + y + \frac{9}{2\sqrt{2}} = 0$ \textcircled{C}

$x + y - \frac{4}{2\sqrt{2}} = 0$ $\textcircled{D} x + y - \frac{4}{2\sqrt{2}} = 0$ 。

【85 二夜】

6. 從點 $(2,1)$ 至一圓 $x^2 + y^2 = 1$ 之切線方程式的斜率為 $\textcircled{A} 0$ 或 $\frac{4}{3}$ $\textcircled{B} 1$ 或 $\frac{3}{4}$ $\textcircled{C} \frac{4}{5}$ 或 2 $\textcircled{D} 1$ 或 2 。

【86 保甄】

7. 設圓方程式為 $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 11 = 0$ 且點 $P(2,-1)$ ，則下列何者正確？ \textcircled{A} 圓心為 $(2,3)$ \textcircled{B} 半徑為 2 \textcircled{C} P 點在圓內 \textcircled{D} P 點在圓外 \textcircled{E} 以上皆非。

【86 日工】

8. 已知斜率為 3 且與圓 $x^2 + y^2 = 25$ 相切之直線方程式 \textcircled{A}

$$y = 3x \pm 5\sqrt{10} \text{ ② } y = 3x \pm 10\sqrt{5} \text{ ③ } y = 3x \pm 5 \text{ ④ } y = 3x \pm 10 \text{ 。$$

【86 日商】

9. 設直線 $3x - 4y + 5 = 0$ 與圓 $x^2 + y^2 - 6x + 8y = a$ 相切，則 $a =$ ① 9 ② 11 ③ 24 ④ 39 。

【87 保甄工】

10. 圓： $2x^2 + 2y^2 - 8x - 5y + k = 0$ 與 x 軸相切，則 $k =$ ① 8 ② -8 ③ $\frac{25}{8}$ ④ $-\frac{25}{8}$ 。

【87 保甄商】

11. 設直線 $L: 2x - y + 2 = 0$ 與圓 $C: (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$ ，則下列何者正確？① 圓 C 之半徑為 4 ② 直線 L 與圓 C 相交於二點 ③ 直線 L 與圓 C 相切 ④ 直線 L 與圓 C 不相交。

【87 日工】

12. 圓 $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 3 = 0$ ，則過圓上一點 $P(1, 2)$ 之切線 L 之方程式為 ① $x + 3y - 1 = 0$ ② $3x + y - 1 = 0$ ③ $x - 3y - 1 = 0$ ④ $3x - y - 1 = 0$ 。

【87 日商】

13. 已知圓 $C: x^2 + y^2 - 16 = 0$ ，直線 $L: 3x - 4y - 10 = 0$ ，設圓 C 與直線 L 相交於 P 、 Q 兩點，則 \overline{PQ} 之長為 ① $2\sqrt{3}$ ② $3\sqrt{2}$ ③ $4\sqrt{3}$ ④ $6\sqrt{2}$ 。

【87 日商】

14. 參術方程式
$$\begin{cases} x = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \\ y = \frac{2t}{t^2 + 1} \end{cases}, t \in [-1, 1]$$
，為下列何者圖形之一部分？① 圓 ② 拋物線 ③ 橢圓 ④ 雙曲線。

【85 日工】

15. 在座標平面上，直線 $x - y = 1$ 與圓 $x^2 + y^2 - 4x + 8y + 4 = 0$ 之關係為 ① 相交於一點 ② 相交於相異兩點 ③ 相交於相異三點

①不相交。

【87 北夜】

16. 設 C 表以 $(1,2)$ 為圓心，半徑為 2 之圓，直線

$L: 12x - 5y = 28$ ，則下列敘述何者正確？
 ① 向量 $(5,12)$ 為直線 L 之一個法向量
 ② 圓 C 的圓心在直線 L 上
 ③ 圓 C 與直線 L 相切
 ④ 圓 C 與直線 L 相交於兩點。

【87 中夜】

17. 空間一點 $(3,5,4)$ 到球面 $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 4z = 0$ 的最短距離為
 ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4。

【88 推甄】

18. 過點 $A(1,2)$ 像圓 $x^2 + y^2 = 4$ 作二切線，令二切點為 P 、 Q ，
 圓心為 O ，則四邊形 $APOQ$ 的面積為
 ① 8 ② $2\sqrt{5}$ ③ 4 ④ 2。

【88 保甄工】

19. 設點 $A(3,-1)$ 到圓 $x^2 + y^2 + 4x - 4y - 1 = 0$ 之最遠距離為

M ，最近距離為 m ，則 $M \times m =$ ① $3\sqrt{34}$ ② 43 ③ $25\sqrt{3}$ ④ 25。

【88 保甄商】

20. 圓 $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ 之圓心與點 $(4,5)$ 所連成之直線的斜率等於
 ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8。

【88 日工】

21. 下列圓方程式何者與直線 $x + 2y - 5 = 0$ 相切與點 $P(3,1)$ ？

① $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ ② $x^2 + y^2 + 4x - 2y = 20$ ③
 $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 8$ ④ $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$ 。

【88 日商】

22. 過圓外一點 $(5,2)$ 與圓 $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ 相切之直線

方程式的斜率為
 ① $\pm\sqrt{2}$ ② $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ $\pm\sqrt{3}$ ④ $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ 。

【88 日商】

23. 設平面上有兩圓 $C_1: x^2 + y^2 + 2x - 4y - 5 = 0$ ，及

$C_2: x^2 + y^2 - 6x + 2y - 11 = 0$ ，則其連心線段長為
 ① 8 ② 7 ③ 6 ④ 5。

【88 嘉南夜】

24. 若圓的方程式為 $x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$ 則下列敘述何者正確？
 Ⓐ 圓心為 $(0,0)$ Ⓑ 半徑為 3 Ⓒ 點 $(0,0)$ 在圓內 Ⓓ 點 $(2,3)$ 在圓上
 Ⓔ 點 $(3,2)$ 在圓上。

【88 推甄工】

25. 若方程式 $x^2 + y^2 + 6x - 4y + c = 0$ 之圖形為一點 (a,b) ，則 $a+b+c$ 之值為 Ⓐ 16 Ⓑ 15 Ⓒ 14 Ⓓ 13 Ⓔ 12。

【89 推甄工】

26. 若圓的方程式為 $x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$ 則下列敘述何者正確？
 Ⓐ 圓心為 $(0,3)$ Ⓑ 半徑為 3 Ⓒ 點 $(3,2)$ 在圓上 Ⓓ 點 $(2,3)$ 在圓上 Ⓔ 點 $(0,0)$ 在圓內。

【89 推甄商】

27. 直線 $L: 2x + y + 4 = 0$ 圓 $C: x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ ，則直線 L 與圓 C 有幾個交點？ Ⓐ 3 Ⓑ 0 Ⓒ 4 Ⓓ 1 Ⓔ 2。

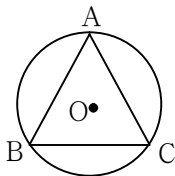
【89 保甄】

28. 由圓 $(x+2)^2 + (y-6)^2 = 16$ 所圍成之面積等於 Ⓐ 4π Ⓑ 8π Ⓒ 12π Ⓓ 16π 。

【89 日工】

29. 如右圖，已知圓 O 的直徑為 a ，則圓 O 的內接正 $\triangle ABC$ 之面積為

- Ⓐ $\frac{3}{8}a^2$ Ⓑ $\frac{3\sqrt{3}}{16}a^2$
 Ⓒ $\frac{3}{16}a^2$ Ⓓ $\frac{\sqrt{3}}{8}a^2$ 。



【89 日商】

30. 圓 $C: x^2 + y^2 = 1$ 外一點 $P(2,-2)$ 到圓 C 的切線方程式為 Ⓐ

$3y + 6 = (-4 \pm \sqrt{7})(x - 2)$ Ⓑ $3y - 6 = (4 \pm \sqrt{7})(x - 2)$ Ⓒ

$6y + 3 = (-4 \pm \sqrt{7})(x - 2)$ Ⓓ $6y + 3 = (4 \pm \sqrt{7})(x - 2)$ 。

【89 日商】

31. 設過 $A(-1,2)$ ， $B(3,-4)$ 兩點之直線為 L ，則下列敘述何者正

確？**(A)**原點到 L 之距離為 $\sqrt{13}$ **(B)** L 與平面座標軸相交的兩截距和是 5 **(C)** L 與圓： $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 4$ 相切 **(D)** 垂直於 L 且過點 $(1,1)$ 之直線方程式為 $2x-3y+1=0$ 。

【89 中夜】

32. 設圓心為 $(-2,3)$ 之一圓與直線 $L: 3x+4y-16=0$ 相切，則此圓之面積為 **(A)** 10π **(B)** 8π **(C)** 6π **(D)** 4π 。

【89 南夜】

33. 設一圓 $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$ ，求過圓上一點 $(3,5)$ 的切線方程式？**(A)** $4x+3y-27=0$ **(B)** $3x+4y-29=0$ **(C)** $4x-3y+3=0$ **(D)** $3x-4y+11=0$ 。

【90 學測工】

34. 若圓 $C: x^2 + 6ax + y^2 = 64$ 的面積為 100π ，則 a 可以是下列中的哪一個？**(A)** -2 **(B)** -1 **(C)** 1 **(D)** 4 。

【90 學測商】

35. 已知圓過點 $(4,0)$ 、 $(-4,0)$ 、 $(0,3)$ ，若此圓半徑為 r ，則 $r = ?$
(A) 4 **(B)** $\frac{25}{6}$ **(C)** 5 **(D)** $\frac{26}{5}$ 。

【91 學測工】

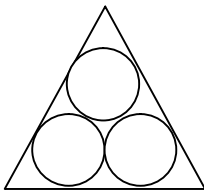
36. 試求平面上通過 $A(0,0)$ ， $B(6,6)$ 兩點，且圓心在 y 軸上的圓方程式為何？**(A)** $x^2 + y^2 - 12y = 0$ **(B)** $x^2 + y^2 - 6x - 6y = 0$ **(C)** $x^2 + y^2 - 4x - 8y = 0$ **(D)** $x^2 + y^2 - 8x - 4y = 0$ 。

【91 學測商】

37. 圓 $x^2 + y^2 + 4x + 8y = 0$ 所圍成的面積為何？**(A)** $\frac{5}{4}\pi$ **(B)** 5π **(C)** 10π **(D)** 20π 。

【91 學測商】

38. 三個半徑為 2 的圓，兩兩外切且內切於正三角形，如右圖，則此正三角形之邊長為

(A) 6**(B)** $4+2\sqrt{3}$ 

Ⓒ 8

Ⓓ $4 + 4\sqrt{3}$ 。

【91 學測工】

39. 已知直線 $3x + 4y + 1 = 0$ 與圓 $x^2 + y^2 - 6y - 5 = 0$ 交於 A 、 B 兩點，則 $\overline{AB} =$ Ⓐ 2 Ⓑ $2\sqrt{2}$ Ⓒ $2\sqrt{11}$ Ⓓ $4\sqrt{11}$ 。

【91 學測工】

40. 設 $a > 0$ ，若圓 $x^2 + y^2 + 2ax - 1 = 0$ 與直線 $x + y = 3$ 相切，則 $a = ?$ Ⓐ 1 Ⓑ 3 Ⓒ 5 Ⓓ 7。

【92 統一入學】

41. 圓 $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$ 上的點到直線 $x - y = 5$ 之最短距離為何？Ⓐ $3\sqrt{2} - 3$ Ⓑ $4\sqrt{2} - 3$ Ⓒ 3 Ⓓ 5。

【92 統一入學】

42. 若一正方形的外接圓為 $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$ ，則此正方形的面積為 Ⓐ 2 Ⓑ 4 Ⓒ 8 Ⓓ 16。

【93 統一入學】

43. 在坐標平面上，若不計單位，一圓之面積為圓周長的 2 倍，則此圓半徑為何？Ⓐ 2 Ⓑ 4 Ⓒ 6 Ⓓ 8。

【94 統一入學】

44. 在坐標平面上，設 k 為整數，若點 $(k-4, k-2)$ 在圓 $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 13$ 的內部，(不在圓上)，則 k 共有幾個？Ⓐ 1 Ⓑ 2 Ⓒ 3 Ⓓ 4。

【95 統一入學】

45. 設 m 、 b 為實數，若直線 $y = mx + b$ 經過點 $(-1, 1)$ 且與圓 $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 10 = 0$ 相切，則 $m + b = ?$ Ⓐ 4 Ⓑ 5 Ⓒ 6 Ⓓ 7。

【96 統一入學】

46. 下列何者為方程式 $(x+y)^2 - 2(xy - \frac{3}{2}x + y) + 2 = 0$ 之圖

形？Ⓐ 一點 Ⓑ 一直線 Ⓒ 圓心為 $(-\frac{3}{2}, 2)$ Ⓓ 半徑為 $\frac{\sqrt{5}}{2}$ 之圓。

【96 統一入學】

47. 試問在坐標平面上，斜率為 $\frac{1}{2}$ 且通過

$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$ 之圓心的直線方程式為何？Ⓐ

$x - 2y + 5 = 0$ Ⓑ $2x - y + 5 = 0$ Ⓒ $x + 2y + 5 = 0$ Ⓓ

$2x + y + 5 = 0$ 。

【96 統一入學】

～解答～

歷屆試題：

1. ① 2. ① 3. ⑤ 4. ① 5. ① 6. ① 7. ① 8. ① 9. ② 10. ①
11. ① 12. ① 13. ③ 14. ① 15. ② 16. ③ 17. ① 18. ① 19. ① 20. ②
21. ① 22. ① 23. ① 24. ⑤ 25. ⑤ 26. ③ 27. ② 28. ① 29. ② 30. ①
31. ① 32. ① 33. ① 34. ① 35. ② 36. ① 37. ① 38. ① 39. ③ 40. ①
41. ② 42. ③ 43. ② 44. ① 45. ② 46. ① 47. ①