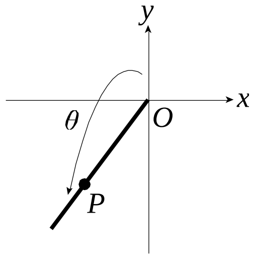
# 臺北市立中山女高 106 學年度第一學期第一次段考高二數學試題

班級：________ 座號：________ 姓名：________________得分：__________

一、填充題：每格 5 分，共 100 分．

1. 計算 $\sin^2 30° + \cos^2 45° =$ ____________．
2. 如下圖，$\theta$ 角是以 $y$ 軸正向為始邊，終邊落在第三象限上，終邊上一點 $P(-3,-4)$，求 $\sin\theta =$ ____________．




3. 已知 $A$、$B$ 兩點的極坐標分別為 $A[1,60°]$，$B[\sqrt{3},150°]$，$\overline{AB}$ 中點為 $C$，則 $C$ 點的極坐標為____________．
4. 設 $\sin\theta = \dfrac{3}{5}$ 且 $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$，求 $\sin(\theta + \dfrac{3}{2}\pi) =$ ____________．
5. 設 $\theta$ 為第四象限角且 $\dfrac{1}{\sin\theta} + \dfrac{1}{\cos\theta} = \sqrt{3}$，求 $\sin\theta \times \cos\theta =$ ____________．
6. 已知 $\theta$ 為第二象限角且 $\cos\theta = \cos 2017°$，若 $\theta$ 的最小正同界角為 $x°$，則 $x =$ ____________．
7. 已知 $\cos x \neq 0$，求 $\dfrac{\sin(x+60°)-\sin(x-60°)}{\cos x} =$ ____________．
8. 已知 $\sin\alpha - \sin\beta = \dfrac{1}{2}$，$\cos\alpha - \cos\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，求 $\cos(\alpha - \beta) =$ ____________．
9. 若 $270° < \theta < 360°$，$\sin\theta = -\dfrac{4}{5}$，求 $\cos\dfrac{\theta}{2} =$ ____________．
10. 計算 $\dfrac{\sin 15°}{\sin 5°} - \dfrac{\cos 15°}{\cos 5°} =$ ____________．
11. 已知△$ABC$ 的三邊長為 $a$，$b$，$c$，下列哪些正確？____________（多選）
(A)以 $a+1$，$b+1$，$c+1$ 為三邊長的三角形一定存在 (B)以 $\dfrac{a}{2}$，$\dfrac{b}{2}$，$\dfrac{c}{2}$ 為三邊長的三角形一定存在 (C)以 $a+b$，$b+c$，$c+a$ 為三邊長的三角形一定存在 (D)以 $a^2$，$b^2$，$c^2$ 為三邊長的三角形一定存在 (E)以 $\sqrt{a}$，$\sqrt{b}$，$\sqrt{c}$ 為三邊長的三角形一定存在．
12. 若三角形之三邊長分別為 6、9 與 $k$，且 $k$ 為整數，試問滿足此三角形為鈍角三角形之 $k$ 有____________個．
13. 若在△$ABC$ 內部有一點 $P$ 滿足 $\overline{PA}=1$，$\overline{PB}=2$，$\overline{PC}=3$ 且 $\angle APB = \angle BPC = \angle CPA = 120°$，則△$ABC$ 的面積 = ____________．
14. 若△$ABC$ 的三中線長為 4、5、6，則△$ABC$ 的面積為____________．

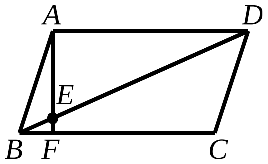
15. 四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}=4$，$\overline{AC}=5$，$\overline{AD}=\sqrt{5}$，且 $\tan\angle DAB=2$，$\sin\angle ABC=1$，求 $\overline{CD}=$______________．

16. 海岸上由觀測站 $A$ 測得一船 $C$ 在北 15°西，同時在 $A$ 之正西方 3 公里處的另一觀測站 $B$ 測得 $C$ 船在北 45°東，則此時 $A$ 站到 $C$ 船的距離為______________公里．

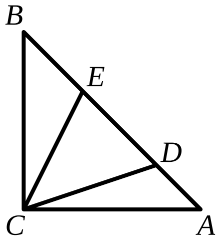
17. 自塔的正東方 $A$ 點測得塔頂仰角為 30°，而在塔的東 30°南 $B$ 點測得塔頂仰角為 45°，已知 $A$ 與 $B$ 相距 30 公尺，求塔高為______________公尺．

18. 根據氣象預報，某颱風於某日下午 2 時中心位置在蘭嶼正南方 400 公里處，暴風半徑 250 公里以每小時 50 公里的速度朝北 30°西等速直線前進．設此颱風的速度、方向及暴風半徑都不變，求蘭嶼在此暴風圈內前後共______________小時．

19. 如下圖，平行四邊形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=72°$，點 $F$ 在 $\overline{BC}$ 上且 $\overline{AF}\perp\overline{BC}$，$\overline{AF}$ 交 $\overline{BD}$ 於 $E$，$\overline{AB}=1$，$\overline{DE}=2$，設 $\angle AED=x°$，求 $x=$______________．




20. 如下圖，$\triangle ABC$ 中，$\overline{AC}=\overline{BC}$，$\angle ACB=90°$，$D$，$E$ 在 $\overline{AB}$ 上，$\overline{AD}=3$，$\overline{BE}=4$，$\angle DCE=45°$，求 $\overline{DE}=$______________．



解答

一、填充題：

| 1. | 2. | 3. | 4. |
|---|---|---|---|
| $\frac{3}{4}$ | $\frac{3}{5}$ | $[1,120°]$ | $\frac{4}{5}$ |
| 5. | 6. | 7. | 8. |
| $-\frac{1}{3}$ | 143 | $\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}$ |
| 9. | 10. | 11. | 12. |
| $-\frac{2}{\sqrt{5}}$ | 2 | (A)(B)(C)(E) | 7 |
| 13. | 14. | 15. | 16. |
| $\frac{11\sqrt{3}}{4}$ | $5\sqrt{7}$ | $\sqrt{10}$ | $\sqrt{6}$ |
| 17. | 18. | 19. | 20. |
| 30 | 6 | 66 | 5 |

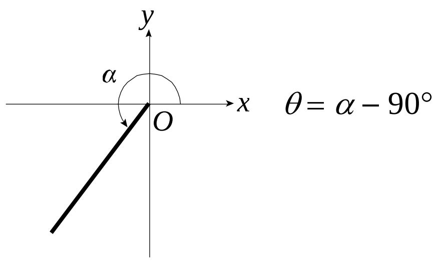
解析

## 一、填充題：

1. $\sin^2 30° + \cos^2 45° = (\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 = \frac{3}{4}$ .

2. 注意圖形中$\theta$ 非標準位置角

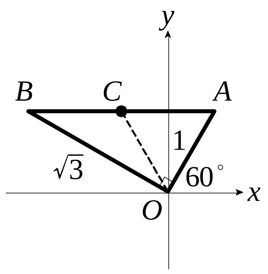
$\therefore \sin\theta = \sin(\alpha - 90°) = \sin(-(90° - \alpha)) = -\sin(90° - \alpha) = -\cos\alpha = -\frac{-3}{5} = \frac{3}{5}$ .




3. $\because \angle AOB = 90°$，$\overline{OA} = 1$，$\overline{OB} = \sqrt{3} \Rightarrow \overline{AB} = 2$

又 $C$ 為 $\overline{AB}$ 中點，$\therefore \overline{OC} = \overline{AC} = \overline{OA} = 1$

$\therefore \angle AOC = 60° \Rightarrow C$ 的極坐標為$[1,120°]$ .




4. $\because \sin\theta = \frac{3}{5}$，$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi \Rightarrow \cos\theta = \frac{-4}{5}$

$\sin(\theta + \frac{3\pi}{2}) = -\cos\theta = -(\frac{-4}{5}) = \frac{4}{5}$ .

5. $\frac{1}{\sin\theta} + \frac{1}{\cos\theta} = \frac{\cos\theta + \sin\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \sqrt{3} \Rightarrow \sin\theta + \cos\theta = \sqrt{3}\sin\theta\cos\theta$

二邊平方 $\Rightarrow \sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = 3\sin^2\theta\cos^2\theta$

$\Rightarrow 3(\sin\theta\cos\theta)^2 - 2(\sin\theta\cos\theta) - 1 = 0$

令 $\sin\theta\cos\theta = a \Rightarrow 3a^2 - 2a - 1 = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$ 或 1

$\because \theta$ 為第四象限角，$\sin\theta < 0$，$\cos\theta > 0 \Rightarrow$取 $\sin\theta\cos\theta = -\frac{1}{3}$ .

6. 2017°之最小正同界角為 217°

$\therefore \cos 2017° = \cos 217° = \cos(180° + 37°) = -\cos 37° = \cos(180° - 37°)$

又$\theta$ 為第二象限角，$\therefore$取$\theta$ 的最小正同界角 $x° = 180° - 37° = 143°$

$\Rightarrow x = 143$ .

7. $\frac{\sin(x+60°) - \sin(x-60°)}{\cos x} = \frac{2\cos x \sin 60°}{\cos x} = 2\sin 60° = \sqrt{3}$ .

8. $(\sin\alpha-\sin\beta)^2=\sin^2\alpha-2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta=\dfrac{1}{4}$

$(\cos\alpha-\cos\beta)^2=\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta=\dfrac{3}{4}$

二式相加 $\Rightarrow(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)-2(\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta)+(\sin^2\beta+\cos^2\beta)=1$

$\Rightarrow 2-2\cos(\alpha-\beta)=1\Rightarrow\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{1}{2}$ .

9. $\because 270°<\theta<360°\Rightarrow 135°<\dfrac{\theta}{2}<180°$， $\therefore\cos\dfrac{\theta}{2}<0$

$\sin\theta=-\dfrac{4}{5}\Rightarrow\cos\theta=\dfrac{3}{5}$

$\Rightarrow\cos\dfrac{\theta}{2}=-\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{2}}=-\sqrt{\dfrac{1+\frac{3}{5}}{2}}=-\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ .

10. [法一]

利用三倍角公式

$\dfrac{\sin15°}{\sin5°}-\dfrac{\cos15°}{\cos5°}=\dfrac{3\sin15°-4\sin^3 5°}{\sin5°}-\dfrac{4\cos^3 5°-3\cos5°}{\cos5°}$

$=3-4\sin^2 5°-4\cos^2 5°+3=6-4(\sin^2 5°+\cos^2 5°)=6-4=2$ .

[法二]

利用和角公式

通分得 $\dfrac{\sin15°\cos5°-\cos15°\sin5°}{\sin5°\cos5°}=\dfrac{\sin(15°-5°)}{\sin5°\cos5°}=\dfrac{\sin10°}{\frac{1}{2}\sin10°}=2$ .

11. 假設三邊長 $a$、$b$、$c$ 滿足 $a\le b\le c$

(A)○： $\because a+1\le b+1\le c+1$

$\therefore$只檢驗$(a+1)+(b+1)=a+b+2>c+2>c+1$ .

(B)○： $\dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{2}=\dfrac{a+b}{2}>\dfrac{c}{2}$ .

(C)○： $\because a+b\le c+a\le b+c$

$\therefore$只檢驗$(a+b)+(c+a)=2a+b+c>b+c$ .

(D)╳： $\because a^2\le b^2\le c^2$

$\therefore$只檢驗 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab\le c^2-2ab$ 無法與 $c$ 比較大小

$\therefore$找反例： 如 $a=2$，$b=3$，$c=4$

$a^2=4$，$b^2=9$，$c^2=16\Rightarrow 4+9<16$（不合）.

(E) ○： $\because\sqrt{a}\le\sqrt{b}\le\sqrt{c}$

$\therefore(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=a+b+2\sqrt{ab}>c+2\sqrt{ab}>c=(\sqrt{c})^2$

$\Rightarrow\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{c}$ .

12. 分別討論：

(1) $\begin{cases} 6+9>k \Rightarrow k<15 \\ 6^2+9^2<k^2 \Rightarrow k^2>117 \Rightarrow k>\sqrt{117} \end{cases}$

$\Rightarrow k=11$，12，13，14

(2) $\begin{cases} 6+k>9 \Rightarrow k>3 \\ 6^2+k^2<9^2 \Rightarrow k^2<45 \Rightarrow k<\sqrt{45} \end{cases}$

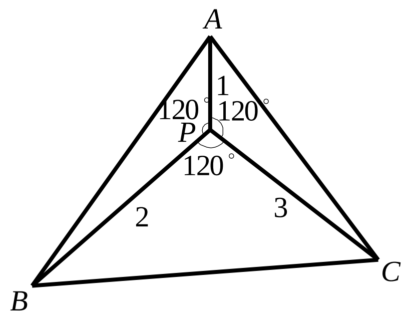
$\Rightarrow k=4$，5，6

∴共有 7 個．

13. $\triangle ABC$ 面積 ＝ $\triangle ABP$ 面積 ＋ $\triangle ACP$ 面積 ＋ $\triangle BPC$ 面積

$$=\frac{1}{2}\times 1\times 2\times \sin 120^\circ+\frac{1}{2}\times 1\times 3\times \sin 120^\circ+\frac{1}{2}\times 2\times 3\times \sin 120^\circ$$

$$=\frac{11\sqrt{3}}{4}\ .$$



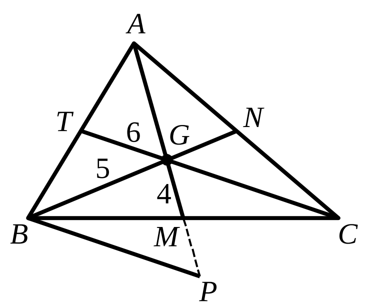

14. 令三中線交點為 $G$，如圖，$\because \overline{AG}:\overline{GM}=2:1$

延長 $\overline{GM}$ 使得 $\overline{GP}=\overline{AG}=\frac{2}{3}\times 4=\frac{8}{3}$

連接 $\overline{BP} \Rightarrow \overline{BP}=\overline{CG}=\frac{2}{3}\times 6=4$，又 $\overline{BG}=\frac{2}{3}\times 5=\frac{10}{3}$

$\Rightarrow$ $\triangle BGP$ 面積 $=\sqrt{5\times(5-\frac{8}{3})(5-4)(5-\frac{10}{3})}$（其中 $s=\dfrac{\frac{8}{3}+4+\frac{10}{3}}{2}=5$）$=\frac{5\sqrt{7}}{3}$

又 $\triangle ABC$ 面積 $=3\triangle BGP=3\times\frac{5\sqrt{7}}{3}=5\sqrt{7}$ ．



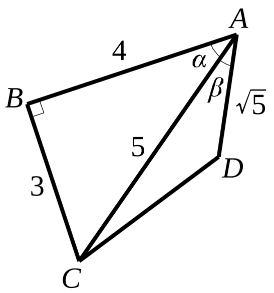
15. $\because \sin\angle ABC = 1 \Rightarrow \angle ABC = 90° \Rightarrow \overline{BC} = 3$

$\because \angle DAB = \alpha + \beta$ 又 $\tan\angle DAB = 2$， $\tan\alpha = \dfrac{3}{4}$

$$\therefore \tan\beta = \tan(\angle DAB - \alpha) = \frac{\tan\angle DAB - \tan\alpha}{1 + \tan\angle DAB \cdot \tan\alpha} = \frac{2 - \frac{3}{4}}{1 + 2 \times \frac{3}{4}} = \frac{1}{2}$$

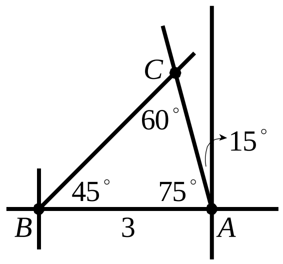
$\Rightarrow \cos\beta = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ 由餘弦定理知 $\overline{CD}^2 = 5^2 + (\sqrt{5})^2 - 2 \times 5 \times \sqrt{5} \times \dfrac{2}{\sqrt{5}} = 10$

$\Rightarrow \overline{CD} = \sqrt{10}$ .




16. 畫出圖來，由正弦定理知

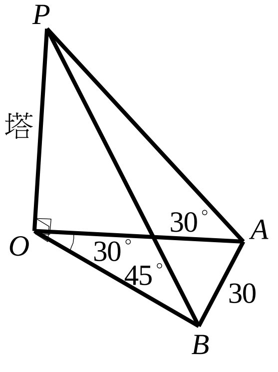
$$\frac{3}{\sin 60°} = \frac{\overline{AC}}{\sin 45°} \Rightarrow \overline{AC} = \frac{3 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{6}$$ .




17. 令塔高為 $h$

$\Rightarrow \overline{OA} = \sqrt{3}h$ ， $\overline{OB} = h$

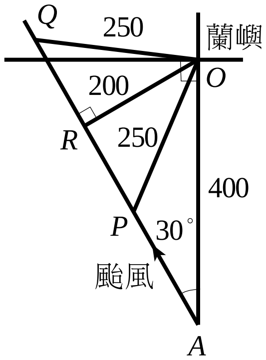
由餘弦定理知 $\cos 30° = \dfrac{(\sqrt{3}h)^2 + h^2 - 30^2}{2 \times \sqrt{3}h \times h} \Rightarrow h = 30$ .



18. 蘭嶼與颱風的最短距離為 $400\times\sin30^\circ=200=\overline{OR}$

$\Rightarrow\overline{OP}=250\Rightarrow\overline{PR}=\sqrt{250^2-200^2}=150$

$\therefore\overline{PQ}=2\overline{PR}=300\Rightarrow\dfrac{300}{50}=6$（小時）.




19. $\because\overline{AD}/\!/\overline{BC}$，$\therefore\angle FAD=90^\circ\Rightarrow\triangle ADE$ 為直角三角形

$\Rightarrow\overline{AD}=2\sin x^\circ$，$\overline{AE}=2\cos x^\circ$

又$\triangle ABF$ 為直角三角形$\Rightarrow\overline{AF}=1\times\sin72^\circ$，$\overline{BF}=\cos72^\circ$

$\Rightarrow\overline{EF}=\sin72^\circ-2\cos x^\circ$

$\triangle BEF$ 為直角三角形且$\angle BEF=x^\circ$

$\therefore\tan x^\circ=\dfrac{\overline{BF}}{\overline{EF}}=\dfrac{\cos72^\circ}{\sin72^\circ-2\cos x^\circ}=\dfrac{\sin x^\circ}{\cos x^\circ}$

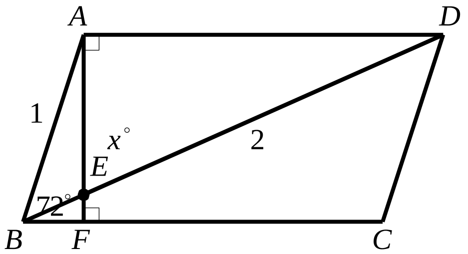
$\Rightarrow\cos x^\circ\cos72^\circ=\sin x^\circ\sin72^\circ-2\sin x^\circ\cos x^\circ$

$\Rightarrow\cos x^\circ\cos72^\circ-\sin x^\circ\sin72^\circ=-2\sin x^\circ\cos x^\circ$

$\Rightarrow\cos(x^\circ+72^\circ)=-\sin2x^\circ=\cos(90^\circ+2x^\circ)$

$\therefore$①$x^\circ+72^\circ=90^\circ+2x^\circ\Rightarrow x^\circ=-18^\circ$（不合）

②$x^\circ+72^\circ+90^\circ+2x^\circ=360^\circ\Rightarrow x^\circ=66^\circ\Rightarrow x=66$ .



20. 如圖，令 $\overline{DE}=x$

$\overline{AF}=\overline{DF}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ ，  $\overline{BH}=\overline{EH}=2\sqrt{2}=\overline{CG}$

$\overline{EG}=\dfrac{3+x}{\sqrt{2}}$ ，  $\overline{DI}=\overline{GF}=\dfrac{x}{\sqrt{2}}$ ，  $\overline{CF}=\overline{CG}+\overline{GF}$

令$\angle DCA=\alpha$，$\angle ECG=\alpha+45°$，  $\tan\alpha=\dfrac{\dfrac{3}{\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}+\dfrac{x}{\sqrt{2}}}$

$$\tan(\alpha+45°)=\frac{\tan\alpha+\tan 45°}{1-\tan\alpha\tan 45°}$$

$$\frac{\dfrac{3+x}{\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}=\frac{\dfrac{\dfrac{3}{\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}+\dfrac{x}{\sqrt{2}}}+1}{1-\dfrac{\dfrac{3}{\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}+\dfrac{x}{\sqrt{2}}}\times 1}$$

$$\Rightarrow \frac{3+x}{4}=\frac{\dfrac{3}{4+x}+1}{1-\dfrac{3}{4+x}}=\frac{3+4+x}{4+x-3}=\frac{7+x}{1+x}$$

$\Rightarrow (3+x)(1+x)=4(7+x)\Rightarrow x^2=25\Rightarrow x=5$（$-5$ 不合）.