1226 3-3 面積與二階行列式 姓名　　　　座號

一、單選題（4 題 每題 5 分 共 20 分）

(　　　) 1. $a\in R$，方程組 $\begin{cases}6x+(a-2)y-7a+17=0\\(a+5)x-2y+8a+24=0\end{cases}$ 有無限多解，在所有解$(x,\ y)$中 $4x^2+y^2$ 的最小值為？
(1) 24　(2) 32　(3) 40　(4) 64　(5) 128．

【龍騰自命題】

解答　2

解析　方程組有無限多解

$$\Rightarrow \frac{6}{a+5}=\frac{a-2}{-2}=\frac{-7a+17}{8a+24}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}(a+5)(a-2)=-12\\(a-2)(8a+24)=-2(-7a+17)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a^2+3a+2=0\\4a^2-3a-7=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(a+1)(a+2)=0\\(4a-7)(a+1)=0\end{cases}，\therefore a=-1，$$

此時，方程組為 $\begin{cases}6x-3y+24=0\\4x-2y+16=0\end{cases}$，其解為 $\begin{cases}x=t\\y=2t+8\end{cases}$，

$t\in$ □，

$\therefore 4x^2+y^2=4t^2+(2t+8)^2=8(t+2)^2+32$，所以最小值$=32$．

(　　　) 2. 設 $\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=-35$，則下列敘述何者為真？

(1) $\begin{vmatrix}a&c\\b&d\end{vmatrix}=35$　(2) $\begin{vmatrix}-a&b\\c&-d\end{vmatrix}=35$　(3) $\begin{vmatrix}\frac{1}{5}a&b\\c&\frac{1}{5}d\end{vmatrix}=-7$

(4) $\begin{vmatrix}a&b+\frac{1}{5}a\\c&d+\frac{1}{5}c\end{vmatrix}=-7$　(5) $\begin{vmatrix}a&a+\frac{1}{5}b\\c&c+\frac{1}{5}d\end{vmatrix}=-7$．

【課本類題】

解答　5

解析　(1)╳：行列互換其值不變

(2)╳：$\begin{vmatrix}-a&b\\c&-d\end{vmatrix}=ad-bc=-35$

(3)╳：原式$=\frac{1}{25}ad-bc$

(4)╳：$\begin{vmatrix}a&b+\frac{1}{5}a\\c&d+\frac{1}{5}c\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=-35$

$\times(-\frac{1}{5})$

(5)○：原式$=\begin{vmatrix}a&\frac{1}{5}b\\c&\frac{1}{5}d\end{vmatrix}=\frac{1}{5}\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=-7$

故選(5)．

(　　　) 3. 設 $\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=-5$，則 $\begin{vmatrix}3a-2b&4b\\3c-2d&4d\end{vmatrix}$ 的值為

(1) -120　(2) -60　(3)30　(4)60　(5)120．

【龍騰自命題】

解答　2

解析

$$\begin{vmatrix}3a-2b&4b\\3c-2d&4d\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3a&4b\\3c&4d\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-2b&4b\\-2d&4d\end{vmatrix}=3\cdot4\cdot\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=12\cdot(-5)=-60$$

故選(2)．

(　　　) 4. $\triangle ABC$之三頂點為 $A(2,-3)$，$B(3,1)$，$C(-4,3)$，則$\triangle ABC$的面積為　(1)9　(2)12　(3)14　(4)15　(5)18．

【龍騰自命題】

解答　4

解析　$\overrightarrow{AB}=(1,4)$，$\overrightarrow{AC}=(-6,6)$，

$\triangle ABC$ 面積$=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}1&4\\-6&6\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}|6+24|=15$

故選(4)．

二、多選題（3 題 每題 8 分 共 24 分）

(　　　) 1. 下列何者選項恆正確？　(1) $\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b&a\\d&c\end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a&b\\c+99a&d+99b\end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix}a+kc&b+kd\\c&d\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}b+ka&a\\d+kc&c\end{vmatrix}$

(4) $\begin{vmatrix}a+kc&b+kd\\c&d\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}e+ka&f+kb\\a&b\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}a&b\\e-c&f-d\end{vmatrix}$

(5)若 $0°\le\theta\le180°$，且 $\begin{vmatrix}\sin\theta&\cos\theta\\\cos\theta&\sin\theta\end{vmatrix}=1$，則 $\theta=45°$．

【新突破講義】

解答　234

解析　(1)╳：$\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}b&a\\d&c\end{vmatrix}$

(2)○：$\begin{vmatrix}a&b\\c+99a&d+99b\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}$

(3)○：$\begin{vmatrix} a+kc & b+kd \\ c & d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$；

$-\begin{vmatrix} b+ka & a \\ d+kc & c \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

(4)○：

$\begin{vmatrix} a+kc & b+kd \\ c & d \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} e+ka & f+kb \\ a & b \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} e & f \\ a & b \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & b \\ -e & -f \end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix} a & b \\ c-e & d-f \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a & b \\ e-c & f-d \end{vmatrix}$

(5)╳：$\begin{vmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{vmatrix}=1$ ⇒ $\sin^2\theta-\cos^2\theta=1$

⇒ $\cos^2\theta-\sin^2\theta=-1$ ⇒ $\cos 2\theta=-1$ ⇒

$2\theta=180°$ ⇒ $\theta=90°$

故選(2)(3)(4)．

(　　)2. 選出值與行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 的值相等之選項：

(1) $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$　(3) $\begin{vmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{vmatrix}$

(4) $\begin{vmatrix} 1 & b \\ c & ad \end{vmatrix}$　(5) $\begin{vmatrix} a & b \\ kc & kd \end{vmatrix}$．

【習作簿題】

解答　134

解析　(1) $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$，因為行列互換，所以其值不變

(2) $\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$，因為兩列互換，所以其值變號

(3) $\begin{vmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a+c-c & b+d-d \\ c & d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

(4) $\begin{vmatrix} 1 & b \\ c & ad \end{vmatrix}=ad-bc=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

(5) $\begin{vmatrix} a & b \\ kc & kd \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

故選(1)(3)(4)．

(　　)3. 若實數 a、b、c、d 使得聯立方程組 $\begin{cases} ax+8y=c \\ x-4y=3 \end{cases}$ 有解，且聯立方程組 $\begin{cases} -3x+by=d \\ x-4y=3 \end{cases}$ 無解，則下列哪些選項一定正確？　(1) $a\neq-2$　(2) $c=-6$　(3) $b=12$　(4) $d\neq-9$　(5)聯立方程組 $\begin{cases} ax+8y=c \\ -3x+by=d \end{cases}$ 無解【101 學測】

解答　34

解析　$\begin{cases} ax+8y=c \\ x-4y=3 \end{cases}$ 有解

①唯一解：$\frac{a}{1}\neq\frac{8}{-4}$ ⇒ $a\neq-2$

②無限多解：$\frac{a}{1}=\frac{8}{-4}=\frac{c}{3}$ ⇒ $a=-2$，$c=-6$

$\begin{cases} -3x+by=d \\ x-4y=3 \end{cases}$ 無解

⇒ $\frac{-3}{1}=\frac{b}{-4}\neq\frac{d}{3}$ ⇒ $b=12$，$d\neq-9$

又 $\begin{cases} ax+8y=c \\ -3x+by=d \end{cases}$

⇒ 若 $a\neq-2$，則 $\frac{a}{-3}\neq\frac{8}{b}$ ⇒ 唯有一解

若 $a=-2$，$c=-6$，$b=12$，$d\neq-9$ ⇒

$\frac{-2}{-3}=\frac{8}{12}\neq\frac{-6}{d}$ ⇒ 無解

故選(3)(4)

三、填充題（7 題 每題 8 分 共 56 分）

1. 已知△ABC 三頂點為 $A(-3,1)$，$B(2,5)$，$C(4,-6)$，求△ABC 面積為＿＿＿＿＿＿．

【課本類題】

解答　$\frac{63}{2}$

解析　$\overrightarrow{AB}=(5,4)$，$\overrightarrow{AC}=(7,-7)$

△ABC 面積 $=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 7 & -7 \end{vmatrix}\right|=\frac{63}{2}$．

2. △ABC 中，$A(1,2)$，$B(-1,5)$，$C(3,y)$，若△ABC 之面積為 5，求 $y=$ ＿＿＿＿＿＿．

【課本類題】

解答　4 或 -6

解析　$\overrightarrow{AB}=(-2,3)$，$\overrightarrow{AC}=(2,y-2)$

△ABC 面積 $=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & y-2 \end{vmatrix}\right|=5$ ⇒ $|2y+2|=10$

⇒ $y=4$ 或 -6．

3. 求由向量 $\overrightarrow{u}=(2,-5)$，$\overrightarrow{v}=(3,2)$ 所張出的平行四邊形面積為____________。

【課本類題】

解答 19

解析 面積 $=\left|\begin{vmatrix}2 & -5\\3 & 2\end{vmatrix}\right|=19$。

4. 已知 $\begin{vmatrix}a & b\\c & d\end{vmatrix}=5$，求 $\begin{vmatrix}4a & 24b\\c & 6d\end{vmatrix}=$____________。

【課本類題】

解答 120

解析 原式 $=4\begin{vmatrix}a & 6b\\c & 6d\end{vmatrix}=4\times6\times\begin{vmatrix}a & b\\c & d\end{vmatrix}=24\times5=120$。

5. 求下列各行列式的值

(1) $\begin{vmatrix}10 & 8\\-6 & -2\end{vmatrix}=$____________。) $\begin{vmatrix}-2 & 0\\4 & -1\end{vmatrix}=$____________

(3) $\begin{vmatrix}3 & 4\\4 & 11\end{vmatrix}=$____________。

【課本類題】

解答 (1)28;(2)2;(3)17

解析 (1) $\begin{vmatrix}10 & 8\\-6 & -2\end{vmatrix}=-20+48=28$。

(2) $\begin{vmatrix}-2 & 0\\4 & -1\end{vmatrix}=2-0=2$。

(3) $\begin{vmatrix}3 & 4\\4 & 11\end{vmatrix}=33-16=17$。

6. $\begin{cases}\dfrac{2}{3x-y}-\dfrac{4}{2x+y}=1\\ \dfrac{5}{3x-y}+\dfrac{8}{2x+y}=7\end{cases}$ 之解 $(x,\ y)=$____________。

【龍騰自命題】

解答 (1, 2)

解析 令 $\dfrac{1}{3x-y}=A$，$\dfrac{1}{2x+y}=B$，則 $\begin{cases}2A-4B=1\\5A+8B=7\end{cases}$，∴ $A=1$，

$B=\dfrac{1}{4}$，得 $\begin{cases}3x-y=1\\2x+y=4\end{cases}$

$\Rightarrow x=1$，$y=2$，即所求 $(x,\ y)=(1,2)$。

7. 已知方程組 $\begin{cases}2x+5y=kx\\3x+4y=ky\end{cases}$，試問：

(1)若 $k=5$ 時，則方程組的解為____________。

(2)若方程組除 $x=0, y=0$ 外尚有其他解時，則 $k=$____________。

(3)若方程組有 $x>0$，$y>0$ 的解時，則 $k=$____________。【龍騰自命題】

解答 (1) $x=0$，$y=0$;(2) -1 或 7;(3)7

解析 (1)當 $k=5$ 時，方程組為 $\begin{cases}2x+5y=5x\\3x+4y=5y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x-5y=0\\3x-y=0\end{cases}$

解得 $x=0$，$y=0$。

(2)∵方程組除 $x=0$，$y=0$ 外尚有其他解，∴Δ

$=\begin{vmatrix}2-k & 5\\3 & 4-k\end{vmatrix}=0\Rightarrow(k+1)(k-7)=0$，

得 $k=-1$ 或 7。

(3) ①若 $k=-1$ 代入方程組得 $\begin{cases}3x+5y=0\\3x+5y=0\end{cases}\Rightarrow 3x=-5y$，

∵x，y 異號，

∴不可能有 $x>0$，$y>0$ 的解，②若 $k=7$ 代入方程組得 $\begin{cases}5x-5y=0\\3x-3y=0\end{cases}\Rightarrow x=y$，

∵x，y 同號，∴有 $x>0$，$y>0$ 的解，由①②得知 $k=7$。