

一、單選題：每格 9 分、共 27 分

1.(B)

解析：圓心 $O(3, 4)$ ，半徑 $r=5$ ，當直線 L 為 $3x+4y=0$ 時，

$$d(O, L) = \frac{|3 \times 3 + 4 \times 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{25}{5} = 5 = r$$

$\therefore L: 3x+4y=0$ 與圓相切

2.(A)

解析： $|\vec{u}| = 5\sqrt{5}$ ， $|\vec{v}| = 2\sqrt{5}$ ，且 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ 。

(A) $|-3\vec{u}| = 3|\vec{u}| = 15\sqrt{5} = \sqrt{1125}$ 。

(B) $|6\vec{v}| = 6|\vec{v}| = 12\sqrt{5} = \sqrt{720}$ 。

(C) $|-2\vec{u} - 5\vec{v}| = |(10, -30)| = \sqrt{100+900} = \sqrt{1000}$ 。

另法： $|-2\vec{u} - 5\vec{v}|^2 = 4|\vec{u}|^2 + 20\vec{u} \cdot \vec{v} + 25|\vec{v}|^2 = 2 \times (4 \times 25 \times 5)$

$\Rightarrow |-2\vec{u} - 5\vec{v}| = \sqrt{1000}$ 。

(D) $|2\vec{u} - 5\vec{v}| = |(30, 10)| = \sqrt{1000}$ 。

另法： $|2\vec{u} - 5\vec{v}|^2 = 4|\vec{u}|^2 - 20\vec{u} \cdot \vec{v} + 25|\vec{v}|^2 = 2 \times (4 \times 25 \times 5)$

$\Rightarrow |2\vec{u} - 5\vec{v}| = \sqrt{1000}$ 。

(E) $|\vec{u} + 7\vec{v}| = |(-23, 24)| = \sqrt{529+576} = \sqrt{1105}$ 。

另法： $|\vec{u} + 7\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + 14\vec{u} \cdot \vec{v} + 49|\vec{v}|^2$
 $= 25 \times 5 + 49 \times 4 \times 5 = 1105$

$\Rightarrow |\vec{u} + 7\vec{v}| = \sqrt{1105}$ 。

選(A)。

3.(B)

解析：設所求直線之斜率為 m ，

$$\text{則 } \tan 45^\circ = \left| \frac{m - (-\frac{2}{3})}{1 + m \times (-\frac{2}{3})} \right| \Rightarrow \left| \frac{m + \frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}m} \right| = 1$$

$$\Rightarrow \left| m + \frac{2}{3} \right| = \left| 1 - \frac{2}{3}m \right| \Rightarrow \left(m + \frac{2}{3} \right) = \pm \left(1 - \frac{2}{3}m \right), \text{ 得 } m = \frac{1}{5} \text{ 或 } -5$$

$$\text{故所求為 } y-0 = \frac{1}{5}(x-0) \text{ 或 } y-0 = (-5)(x-0)$$

$$\Rightarrow x-5y=0 \text{ 或 } 5x+y=0$$

二、多重選擇題：每格 10 分、共 20 分

1. 答案：(A)(C)(E)

解析：(B) $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = 36 - 18 + 64 = 82$ ， $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{82}$

(D) $|2\vec{a} + \vec{b}|^2 = 4 \times 36 + 4 \times (-9) + 64 = 172$ ，

$$|2\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{172}$$

(E) $|3\vec{a} - 4\vec{b}|^2 = 9 \times 36 - 24 \times (-9) + 16 \times 64 = 1564$ ，

$$|3\vec{a} - 4\vec{b}| = 2\sqrt{391}$$

三、填充題：每格 9 分、共 54 分

1. 答案：(1) $\frac{3}{2}$ ；(2) $\sqrt{115}$

2. 答案： $\sqrt{5}$

3. 答案： -1

4. 答案： -4 或 $-\frac{1}{2}$

解析：根據三角形相似的性質：

$$7:1 = \overline{AP} : \overline{PB} = d(A, L) : d(B, L)$$

$$= \left| \frac{m-10}{\sqrt{m^2+1}} \right| : \left| \frac{m+2}{\sqrt{m^2+1}} \right|$$

$$\Rightarrow 7|m+2| = |m-10|$$

$$\Rightarrow 7m+14 = \pm(m-10)$$

$$\Rightarrow m = -4 \text{ 或 } -\frac{1}{2}$$

5. 答案：5

解析：直線 $4x - 3y = 5$ 之方向向量為 $\vec{u} = (3, 4)$ ，

$$\text{則 } (6, 8) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|^2} \vec{u} = \frac{30 + 4k}{25} (3, 4)$$

$$\Rightarrow \frac{30 + 4k}{25} = 2 \Rightarrow k = 5$$