1220　3-2 向量的內積

姓名　　　　　　　**座號**

一、單選題 (4 題 每題 10 分 共 40 分)

(　　　) 1. 求點 $P(2,-1)$至直線 $3x+2y=6$ 的距離為　(1) $\frac{2\sqrt{13}}{13}$　(2) $\frac{4\sqrt{13}}{13}$　(3) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$　(4) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$　(5) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

【課本類題】

解答　1

解析　$d=\left|\frac{6-2-6}{\sqrt{3^2+2^2}}\right|=\frac{2}{\sqrt{13}}=\frac{2\sqrt{13}}{13}$

故選(1).

(　　　) 2. 設二向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=5$，$\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的夾角為 $\frac{\pi}{3}$，求 $|3\vec{a}-\vec{b}|=$　(1) $\sqrt{31}$　(2)31　(3) $\sqrt{15}$　(4)15　(5)5 .

【課本類題】

解答　1

解析　利用

$$|3\vec{a}-\vec{b}|^2=9|\vec{a}|^2-6|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\frac{\pi}{3}+|\vec{b}|^2=36-30+25=31$$

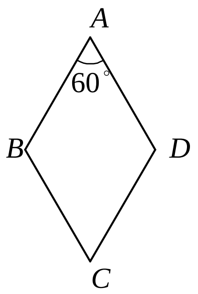
$\therefore |3\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{31}$

故選(1).

(　　　) 3. 如下圖，在菱形 $ABCD$ 中，$\angle BAD=60°$，試問下列向量內積中何者的值最小?

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}$　(2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$　(3) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}$

(4) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$　(5) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}$.



【課堂講義】

解答　5

解析　設菱形的邊長為 a，則 $\overline{AC}=\sqrt{3}a$，$\overline{BD}=a$.

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|^2=a^2$.

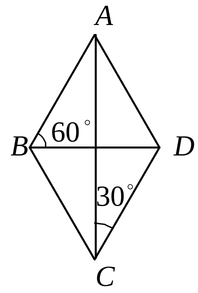
(2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=a\times a\times\cos 60°=\frac{1}{2}a^2$.

(3) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}=a\times a\times\cos 120°=-\frac{1}{2}a^2$.

(4) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\sqrt{3}a\times a\times\cos 90°=0$.

(5) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}=\sqrt{3}a\times a\times\cos 150°=-\frac{3}{2}a^2$.

故選(5).



(　　　) 4. 設△ABC 之∠$A=60°$，$\overline{AC}=b$，$\overline{AB}=c$，今在 $\overline{BC}$ 上取一點 D，使得 $\overline{BD}=\frac{1}{3}\overline{BC}$，令 $s=\overline{AD}$，則 s^2 等於　(1) $\frac{1}{9}(b^2+4c^2+4bc)$　(2) $\frac{1}{9}(b^2+4c^2+2bc)$　(3) $\frac{1}{9}(b^2+4c^2-2bc)$　(4) $\frac{1}{9}(4b^2+c^2+2bc)$　(5) $\frac{1}{9}(4b^2+c^2-2bc)$.

【龍騰自命題】

解答　2

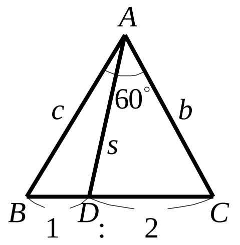
解析　$\because \overline{BD}=\frac{1}{3}\overline{BC}$，$\therefore \overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

$$\Rightarrow s^2=|\overrightarrow{AD}|^2=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD}=(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC})\cdot(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC})$$

$$=\frac{4}{9}|\overrightarrow{AB}|^2+\frac{4}{9}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{1}{9}|\overrightarrow{AC}|^2$$

$$=\frac{4}{9}|\overrightarrow{AB}|^2+\frac{4}{9}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos 60°+\frac{1}{9}|\overrightarrow{AC}|^2$$

$$=\frac{4}{9}\times c^2+\frac{4}{9}\times c\times b\times\frac{1}{2}+\frac{1}{9}\times b^2=\frac{1}{9}(b^2+4c^2+2bc)$$.



二、多選題（2 題 每題 10 分 共 20 分）

(　　) 1. 設兩非零向量 $\overrightarrow{a}=(x_1,y_1)$ 與 $\overrightarrow{b}=(x_2,y_2)$ 滿足 $|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|=|\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}|$．選出正確的選項：

(1) $(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)=(x_1x_2+y_1y_2)^2$

(2) $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 平行　(3) $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 垂直

(4) $x_1y_2-x_2y_1=0$　(5) $x_1x_2+y_1y_2=0$

【課本例習題】

解答　124

解析　(1) 因為 $|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|=|\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}|$，所以

$|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2=|\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}|^2$，

即 $(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)=(x_1x_2+y_1y_2)^2$．

(2) 因為

$|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|=|\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}|\Rightarrow|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}||\cos\theta|$

$\Rightarrow 1=|\cos\theta|$

$\Rightarrow \cos\theta=\pm1$，

所以 $\theta=0°$ 或 $180°$，推得 $\overrightarrow{a}/\!/\overrightarrow{b}$．

(3) $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 平行，非垂直．

(4) 因為 $\overrightarrow{a}/\!/\overrightarrow{b}$，所以

$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}=0\Rightarrow x_1y_2-x_2y_1=0$．

(5) 因為 $\overrightarrow{a}$ 不垂直 $\overrightarrow{b}$，所以 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\neq0$，

即 $(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2)=x_1x_2+y_1y_2\neq0$．

故選 (1)(2)(4)．

(　　) 2. 已知坐標平面上 $\triangle ABC$，其中 $\overrightarrow{AB}=(-4,3)$，且 $\overrightarrow{AC}=(\frac{2}{5},\frac{4}{5})$．試選出正確的選項．

(1) $\overline{BC}=5$　(2) $\triangle ABC$ 是直角三角形　(3) $\triangle ABC$ 的面積為 $\frac{11}{5}$　(4) $\sin B>\sin C$

(5) $\cos A>\cos B$．

【107 學測】

解答　23

解析　(1) 因為

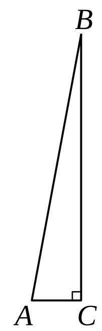
$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=(\frac{2}{5},\frac{4}{5})-(-4,3)=(\frac{22}{5},-\frac{11}{5})$，

所以 $\overline{BC}=\sqrt{(\frac{22}{5})^2+(-\frac{11}{5})^2}=\frac{11\sqrt{5}}{5}$．

(2) 因為 $\overline{AB}=\sqrt{(-4)^2+3^2}=5$，

$\overline{AC}=\sqrt{(\frac{2}{5})^2+(\frac{4}{5})^2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

所以 $\overline{BC}^2+\overline{AC}^2=\frac{121}{5}+\frac{4}{5}=25=\overline{AB}^2$，因此，$\triangle ABC$ 為直角三角形．



(3) $\triangle ABC$ 的面積為

$\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BC}=\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{11\sqrt{5}}{5}=\frac{11}{5}$．

(4) 因為 $\sin B=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{2\sqrt{5}}{25}$，$\sin C=\sin 90°=1$，

所以 $\sin B<\sin C$．

(5) 因為 $\cos A=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{2\sqrt{5}}{25}$，$\cos B=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{11\sqrt{5}}{25}$，

所以 $\cos A<\cos B$．

故選 (2)(3)．

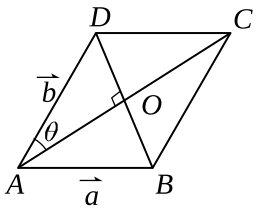
三、填充題（4 題 每題 10 分 共 40 分）

1. 設 $|\overrightarrow{a}|=|\overrightarrow{b}|\neq0$，若 $|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|-|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|=\sqrt{2}|\overrightarrow{a}|$，則 $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$ 之夾角為____________．

【龍騰自命題】

解答 30°

解析 ∵ $|\vec{a}|=|\vec{b}|$，∴ 平行四邊形 $ABCD$ 為菱形，且 $\overline{AC}\perp\overline{BD}$，如下圖，



△AOD 中，$|\overrightarrow{AO}|=\frac{1}{2}|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{b}|\cdot\cos\theta$ ⇒

$|\vec{a}+\vec{b}|=2|\vec{b}|\cdot\cos\theta\cdots①$

$|\overrightarrow{DO}|=\frac{1}{2}|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{b}|\cdot\sin\theta$ ⇒

$|\vec{a}-\vec{b}|=2|\vec{b}|\cdot\sin\theta\cdots②$

①②代入 $|\vec{a}+\vec{b}|-|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{2}|\vec{a}|$，

得 $2|\vec{b}|\cdot\cos\theta-2|\vec{b}|\cdot\sin\theta=\sqrt{2}|\vec{a}|$ ⇒

$\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\cos\theta-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta=\frac{1}{2}$，

$\sin 45°\cdot\cos\theta-\cos 45°\cdot\sin\theta=\frac{1}{2}$ ⇒

$\sin(45°-\theta)=\frac{1}{2}$，

∵ $|\vec{a}+\vec{b}|>|\vec{a}-\vec{b}|$ ⇒ $\vec{a}\cdot\vec{b}>0$，表示 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 之夾角為銳角，

∴ $45°-\theta=30°$ ⇒ $\theta=15°$，

∴ $\vec{a}$、$\vec{b}$ 之夾角為 30°.

2. 二直線 $2x+3y-1=0$ 與 $x-2y+3=0$ 之交角為 θ，求 $\sin\theta=$ ＿＿＿＿＿＿＿.

【課本類題】

解答 $\frac{7\sqrt{65}}{65}$

解析 $2x+3y-1=0$ ⇒ $\overrightarrow{N_1}=(2,3)$

$x-2y+3=0$ ⇒ $\overrightarrow{N_2}=(1,-2)$

$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{N_1}\cdot\overrightarrow{N_2}}{|\overrightarrow{N_1}|\cdot|\overrightarrow{N_2}|}=\frac{2-6}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{5}}=\frac{-4}{\sqrt{65}}$ ⇒

$\sin\theta=\frac{7\sqrt{65}}{65}$.

3. 求兩平行直線 L_1：$3x-4y+5=0$ 與 L_2：$6x-8y+7=0$ 間之距離為＿＿＿＿＿＿＿.

【課本類題】

解答 $\frac{3}{10}$

解析 L_1：$6x-8y+10=0$

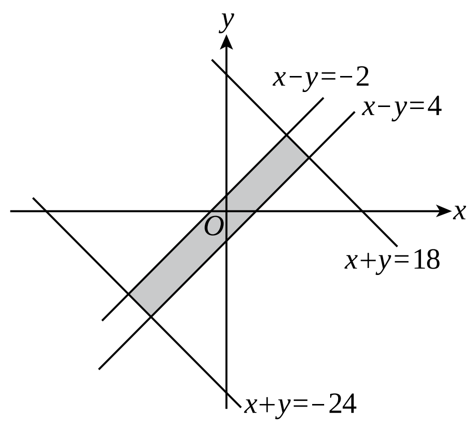
L_2：$6x-8y+7=0$

$d(L_1,L_2)=\frac{|10-7|}{\sqrt{6^2+(-8)^2}}=\frac{3}{10}$.

4. 坐標平面上，圓 Γ 完全落在四個不等式：$x-y\le 4$、$x+y\le 18$、$x-y\ge -2$、$x+y\ge -24$ 所圍成的區域內.則 Γ 最大可能面積為＿＿＿＿＿＿＿π.(化成最簡分數)【107 學測】

解答 $\frac{9}{2}$

解析 不等式的區域為一矩形，如圖所示：



其中矩形較短邊的邊長為兩平行直線 $x-y+2=0$ 與 $x-y-4=0$ 的距離 $\frac{|2-(-4)|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{6}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$.

故圓 Γ 的最大可能半徑為 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$，

即最大可能面積為 $(\frac{3\sqrt{2}}{2})^2\pi=\frac{9}{2}\pi$.