1218 高級甲　3-2 向量的內積

姓名　　　　　　　　　　座號

一、單選題（3 題 每題 10 分 共 30 分）

(　　　) 1. 設一直線 L 過兩點$(3, -2)$，$(-3, 4)$，則原點至 L 之距離為　(1) $\frac{1}{2}$　(2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$　(3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$　(4) 1　(5) 2．

【課本類題】

解答　2

解析　$m_L=\frac{4-(-2)}{-3-3}=-1$

L：$y+2=(-1)(x-3)$　$\Rightarrow$　$x+y-1=0$

$d(O,L)=\left|\frac{0+0-1}{\sqrt{2}}\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

故選(2)．

(　　　) 2. 設 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 之夾角為 $\frac{\pi}{3}$，且 $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，求 $|\vec{a}-2\vec{b}|=$　(1) $2\sqrt{5}$　(2) $\sqrt{26}$　(3) $2\sqrt{7}$　(4) $\sqrt{43}$　(5) 28．

【課本類題】

解答　3

解析　利用

$|\vec{a}-2\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-4|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\frac{\pi}{3}+4|\vec{b}|^2=4-4\times2\times3\times\frac{1}{2}+4\times9=28$

$\therefore|\vec{a}-2\vec{b}|=2\sqrt{7}$

故選(3)．

(　　　) 3. $\triangle ABC$ 內接於圓心為 O 之單位圓．若 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\sqrt{3}\,\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，則 $\angle BAC$ 之度數為何？

(1) $30°$　(2) $45°$　(3) $60°$　(4) $75°$　(5) $90°$．

【107 學測】

解答　4

解析　因為 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\sqrt{3}\,\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，所以

$\overrightarrow{OB}+\sqrt{3}\,\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OA}$．

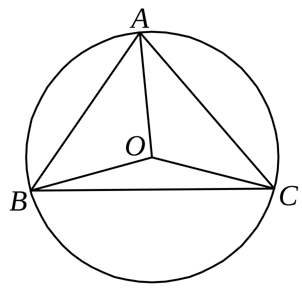
由 $|\overrightarrow{OB}+\sqrt{3}\,\overrightarrow{OC}|^2=|-\overrightarrow{OA}|^2\Rightarrow1+2\sqrt{3}\,\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+3=1$，

得 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$．因此

$\cos\angle BOC=\frac{\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{OC}|}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，

即 $\angle BOC=150°$．又因為圓周角為圓心角的一半，

所以 $\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC=75°$．故選(4)．



二、多選題（2 題 每題 10 分 共 20 分）

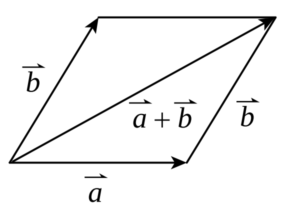
(　　　) 1. $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 表三個非零向量，下列各敘述何者恆成立？　(1) $3\vec{a}+2\vec{b}=3\vec{b}+2\vec{a}$　(2) $|\vec{a}+\vec{b}|\le|\vec{a}|+|\vec{b}|$　(3) 若 $2(\vec{a}+\vec{b})=2\vec{a}-\vec{c}$，則 $\vec{c}=-2\vec{b}$　(4) 若 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$，則 $\vec{b}=\vec{c}$　(5) $|\vec{a}-\vec{b}|^2\le|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2$．

【龍騰自命題】

解答　23

解析　(1)╳：不一定相等

(2)○：如圖



(3)○：$2(\vec{a}+\vec{b})=2\vec{a}-\vec{c}$，

$2\vec{a}+2\vec{b}=2\vec{a}-\vec{c}$　$\Rightarrow$　$\vec{c}=-2\vec{b}$

(4)╳：內積消去律不存在

(5)╳：$\vec{a}$、$\vec{b}$ 反向則不合

故選(2)(3)．

(　　　) 2. 已知直線 L：$6x+9y-4=0$，則下列哪些選項可為直線 L 的法向量？　(1) $\vec{n_1}=(6,9)$　(2) $\vec{n_2}=(2,3)$　(3) $\vec{n_3}=(4,6)$　(4) $\vec{n_4}=(6,-9)$

(5) $\overrightarrow{n_5}=(-2,3)$.

【龍騰自命題】

解答 123

解析 $6x+9y-4=0 \Rightarrow \overrightarrow{n}=(6,9)$ 為直線 L 的一組法向量．

由於法向量不唯一，只要與 $\overrightarrow{n}=(6,9)$ 平行的向量均可．

故選(1)(2)(3)．

三、填充題（5 題 每題 10 分 共 50 分）

1. 設點 $A(-2,2)$、$B(4,8)$為坐標平面上兩點，且點 C 在二次函數 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的圖形上變動．當 C 點的 x 坐標為

(1)____________時，內積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ 有最小值

(2)____________．

【101 學測】

解答 (1) -1;(2) -3

解析 令 C 點坐標為$(2t,2t^2)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(6,6)\cdot(2t+2,2t^2-2)=6(2t+2)+6(2t^2-2)=12(t^2+t)$

$=12(t+\frac{1}{2})^2-3$

當 $t=-\frac{1}{2}$ 時，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ 有最小值 -3

∴ C 點 x 坐標為 -1 時，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ 的最小值為 -3

2. 平行四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}=2$，$\overline{AD}=3$，則 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=$____________．

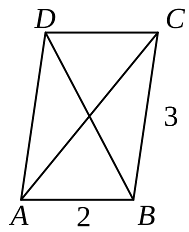
【92 中山女中期中考】

解答 5

解析

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})=|\overrightarrow{BC}|^2-|\overrightarrow{AB}|^2=9-4=5$

．



3. 設△ABC 中，$\overline{AB}=5$，$\overline{BC}=7$，$\overline{CA}=8$，x、$y\in R$，若 E 為外心且 $\overrightarrow{AE}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$，求數對$(m,n)$ ＝ ____________．

【98 高雄中學期中考】

解答 $(\frac{2}{15},\frac{11}{24})$

解析 設 $\overline{AB}$，$\overline{BC}$，$\overline{CA}$ 中點為 R，Q，P

則

$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{AR}+\overrightarrow{RE})\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{RE}\cdot\overrightarrow{AB}$

$=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2$

同理 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|^2$

又由餘弦定理知

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos BAC$

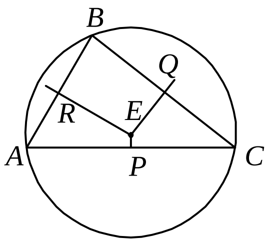
$=\frac{|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2-|\overrightarrow{BC}|^2}{2}=20$

以上所有代入

$\therefore \overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}=m|\overrightarrow{AB}|^2+n\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\Rightarrow\frac{25}{2}=25m+20n$

$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC}=m\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+n|\overrightarrow{AC}|^2\Rightarrow 32=20m+64n$

$\begin{cases}10m+8n=5\\5m+16n=8\end{cases}\Rightarrow (m,n)=(\frac{2}{15},\frac{11}{24})$.



4. 設直線 L 過點 $P(2,3)$ 且與兩條直線 L_1：$3x+4y-7=0$，L_2：$3x+4y+8=0$，分別交於 A，B 兩點，若 $\overline{AB}=3\sqrt{2}$，則 L 之方程式為____________ .

【鳳山高中期中考】

解答　$x-7y+19=0$ 或 $7x+y-17=0$

解析　$d(L_1,L_2)=\frac{|8-(-7)|}{\sqrt{9+16}}=3$，設 L 與 L_1 之銳夾角為 θ

$\Rightarrow \cos\theta=\frac{3}{3\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$,

令 L：$y-3=m(x-2)$，$\therefore mx-y+3-2m=0$

$\Rightarrow \overrightarrow{n_L}=(m,-1)$, $\overrightarrow{n_1}=(3,4)$,

$\therefore \cos\theta=\frac{|3m-4|}{\sqrt{m^2+1}\times\sqrt{9+16}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\therefore$

$\sqrt{2}\cdot|3m-4|=5\sqrt{m^2+1}$,

平方 $\Rightarrow 2(9m^2-24m+16)=25(m^2+1)$，$\therefore 7m^2+48m-7=0$

$\Rightarrow (7m-1)(m+7)=0$，$\therefore m=\frac{1}{7}$ 或 -7

$\Rightarrow L: y-3=\frac{1}{7}(x-2)$, 即 $x-7y+19=0$，

或 $y-3=-7(x-2)$，即 $7x+y-17=0$.

5. $\triangle ABC$ 中，若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=5$, $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=-1$, $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{BA}=-3$，試求

(1) $|\overrightarrow{BA}|=$____________；(2) $\triangle ABC$ 之面積 $=$____________ .

【93 成功高中期中考】

解答　(1) $2\sqrt{2}$; (2) $\frac{\sqrt{23}}{2}$

解析　(1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{0}$ $\Rightarrow$

$\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{0}$

$\Rightarrow$

$|\overrightarrow{AB}|^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}=0$ $\Rightarrow$ $|\overrightarrow{AB}|^2-3-5=0$,

$\therefore$ $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

(2) $\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{0}$,

$\therefore$ $5+1-|\overrightarrow{AC}|^2=0$ $\Rightarrow$ $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{6}$,

$\therefore$ $\triangle$

$ABC=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{8\cdot6-5^2}=\frac{\sqrt{23}}{2}$

.