1112 2-3 圓與直線　　姓名　　　　　座號

一、單選題 (5 題)

(　　　) 1.圓 $x^2+y^2+2x-2y=0$，L 表過圓上一點 $P(-2,2)$的切線，則 L 過下列哪一點?　(1)(1 , 2)　(2)(1 , −3)　(3)(2 , −1)　(4)(−1 , 3)．

【龍騰自命題】

解答　4

解析　過 P 之切線為 $-2x+2y+2\cdot\frac{(-2+x)}{2}-2\cdot(\frac{2+y}{2})=0 \Rightarrow x-y+4=0$，

$(-1,3)$代入成立，故選(4)．

(　　　)2.下列哪一直線為圓 $x^2+y^2-4x+6y-12=0$ 的切線方程式?　(1)$5x-12y-7=0$　(2)$5x+12y-13=0$　(3)$4x-3y+3=0$　(4)$4x+3y-24=0$．

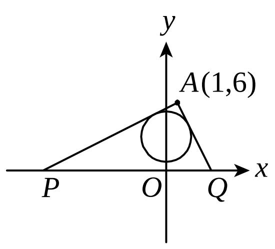
【龍騰自命題】

解答　4

解析　原式 $\Rightarrow (x-2)^2+(y+3)^2=25$，圓心$(2,-3)$，半徑 $r=5$，

(4) $d=\frac{|4\times2+3(-3)-24|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{25}{5}=5$，滿足圓心到直線之距離為 5，表示相切，故選(4)．

(　　　)3.在坐標平面上$A(1,6)$處有一光源，將圓 $C: x^2+(y-3)^2=5$ 投射到 x 軸上，如圖所示，求其在 x 軸上的影子 $\overline{PQ}$ 長為　(1)5　(2)10　(3)15　(4)20　(5)25．



【課本類題】

解答　3

解析　設切線方程式為 $y-6=m(x-1)\Rightarrow y=mx-m+6$，

代入圓 C 得 $x^2+(mx-m+3)^2-5=0$

$\Rightarrow x^2+(m^2x^2+m^2+9-2m^2x+6mx-6m)-5=0$

$\Rightarrow (1+m^2)x^2+(-2m^2+6m)x+m^2-6m+4=0$，

令 $D=(-2m^2+6m)^2-4(1+m^2)(m^2-6m+4)=0$

$\Rightarrow 2m^2+3m-2=0\Rightarrow(2m-1)(m+2)=0\Rightarrow m=\frac{1}{2}$ 或-2

則過 $A(1,6)$之兩切線為 $y-6=\frac{1}{2}(x-1)$或 $y-6=-2(x-1)$，

令 $y=0$ 得 $P(-11,0)$，$Q(4,0)$，則 $\overline{PQ}$ 之長為 $4-(-11)=15$，故選(3)．

(　　　) 4.求通過圓 $x^2+y^2-2x+4y-20=0$ 上一點 $P(4,2)$的切線方程式為　(1)$3x+4y-20=0$　(2)$4x+3y-22=0$　(3)$2x+3y-14=0$　(4)$x-3y-2=0$　(5)$3x+2y-16=0$．

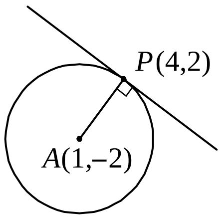
【課本類題】

解答 1

解析 圓：$(x-1)^2+(y+2)^2=25$，圓心 $A(1,-2)$，

半徑 $\overline{AP}$ 的斜率為 $m_{\overline{AP}}=\dfrac{2-(-2)}{4-1}=\dfrac{4}{3}$，$\therefore m_{切}=-\dfrac{3}{4}$，

得切線：$y-2=-\dfrac{3}{4}(x-4)\Rightarrow 3x+4y-20=0$，故選(1)．



(　　　) 5.求通過圓 $x^2+y^2-6x-4y+3=0$ 上一點 $P(0,1)$的切線方程式為　(1)$2x+y-1=0$　(2)$3x+y-1=0$　(3)$6x+y-1=0$　(4)$3x-y+1=0$　(5)$4x-3y+3=0$．

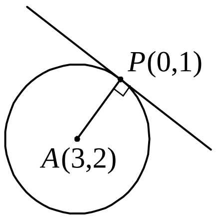
【課本類題】

解答 2

解析 圓：$(x-3)^2+(y-2)^2=10$，圓心 $A(3,2)$，

半徑 $\overline{AP}$ 的斜率為 $m_{\overline{AP}}=\dfrac{2-1}{3-0}=\dfrac{1}{3}$，$\therefore m_{切}=-3$，

得切線：$y-1=-3(x-0)\Rightarrow 3x+y-1=0$，故選(2)．



二、填充題 (5 格)

1.在坐標平面上，已知兩個定點 $A(3,5)$，$B(-2,6)$，設 $P(x,y)$為動點且滿足 $\overline{PA}:\overline{PB}=2:3$，求(1)$P$ 點所成圖形為____________．(2)方程式為____________．

【課本類題】

解答 (1)一圓;(2)$5x^2+5y^2-70x-42y+146=0$

解析 $\because \overline{PA}:\overline{PB}=2:3\Rightarrow 3\overline{PA}=2\overline{PB}$，即 $3\sqrt{(x-3)^2+(y-5)^2}=2\sqrt{(x+2)^2+(y-6)^2}$，

平方得 $9(x^2-6x+9+y^2-10y+25)=4(x^2+4x+4+y^2-12y+36)\Rightarrow 5x^2+5y^2-70x-42y+146=0$，

其圖形為一圓，方程式為 $5x^2+5y^2-70x-42y+146=0$．

2.求通過$(0,4)$且與圓 $x^2+y^2=5$ 相切的切線方程式為____________．3.求通過 $P(4,2)$且與圓 C：$x^2+y^2-4x+4y-2=0$ 相切之直線方程式為____________．

【課本類題】

解答 $x-3y+2=0$ 或 $3x+y-14=0$【課本類題】

解答 $y=?\ \dfrac{\sqrt{55}}{5}x\quad 4$

解析 圓 C：$(x-2)^2+(y+2)^2=10$，圓心 $A\,(2\,,-2)$，半徑 $r=\sqrt{10}$

設切線為 $y-2=m(x-4)$

即 $mx-y+(2-4m)=0$

$\Rightarrow \quad \left|\dfrac{2m+2+2-4m}{\sqrt{m^2+1}}\right|=\sqrt{10} \quad \Rightarrow \quad (-2m+4)^2=10(m^2+1) \quad \Rightarrow \quad 3m^2+8m-3=0$

$\Rightarrow \quad (3m-1)(m+3)=0 \quad \Rightarrow \quad m=\dfrac{1}{3}$ 或 -3

切線方程式為 $x-3y+2=0$ 或 $3x+y-14=0$． 解析 設切線方程式為 $y-4=mx \Rightarrow y=mx+4$ 代入圓，

得 $x^2+(mx+4)^2-5=0 \Rightarrow (1+m^2)x^2+8mx+11=0$，

令 $D=(8m)^2-4\times(1+m^2)\times 11=0 \Rightarrow 20m^2-44=0 \Rightarrow m=?\sqrt{\dfrac{11}{5}}\quad ?\dfrac{\sqrt{55}}{5}$，

故所求切線為 $y=?\dfrac{\sqrt{55}}{5}x\quad 4$．

4.設 $A\,(-1\,,0)$，$B\,(1\,,0)$，平面上滿足 $\overline{PA}:\overline{PB}=\sqrt{3}:1$ 之 P 點的軌跡為一圓 C，則

(1)C 的圓心為__________．(2)半徑為__________．

【龍騰自命題】

解答 (1)$(2\,,0)$;(2)$\sqrt{3}$

解析 設 P 點坐標為$(x\,,y)$，

$\because \quad \overline{PA}=\sqrt{3}\,\overline{PB}$，$\therefore \quad \sqrt{(x+1)^2+y^2}=\sqrt{3}\sqrt{(x-1)^2+y^2}$

$\Rightarrow \quad x^2+y^2-4x+1=0 \quad \Rightarrow \quad (x-2)^2+y^2=3$，故圓的圓心為$(2\,,0)$，半徑為 $\sqrt{3}$．

5.若圓 $x^2+y^2+ax+by+14=0$ 與直線 $x-2y=3c$ 相切於$(5\,,1)$，則數對$(a\,,b\,,c)$之值為__________．

【龍騰自命題】

解答 $(-6\,,-10\,,1)$

解析 $(5\,,1)$代入 $x-2y=3c \quad \Rightarrow \quad 5-2=3c \quad \Rightarrow \quad c=1$，

利用切線公式過$(5\,,1)$的切線為 $5x+y+a\cdot\dfrac{1}{2}(5+x)+b\cdot\dfrac{1}{2}(1+y)+14=0$

$\Rightarrow \quad (10+a)x+(2+b)y+(5a+b+28)=0$ 與 $x-2y-3=0$ 同義，

$\therefore \quad \dfrac{10+a}{1}=\dfrac{2+b}{-2}=\dfrac{5a+b+28}{-3} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -20-2a=2+b \quad \Rightarrow \quad 2a+b=-22\cdots\cdots① \\ -6-3b=-10a-2b-56 \quad \Rightarrow \quad 10a-b=-50\cdots\cdots② \end{cases}$

解①②得 $a=-6$，$b=-10$，故數對$(a\,,b\,,c)=(-6\,,-10\,,1)$．