1023高毅乙　數學科1-4 1-5 2-1解答

一、 單一選擇題：每格 10 分，共 50 分

1. (　　)若 $f(x)=4\sqrt{2}x^3-3\sqrt{2}x+2$，則 $f(x)$ 除以 $(x-\sin15^\circ)$ 的餘式為何？ (A) 1 (B) 2 (C) $\sqrt{2}$ (D) 3 (E) 0。【嘉義女中】

答案：(A)

解析：$f(x)$ 除以 $x-a$ 的餘式為 $f(a)$

故所求為 $f(\sin15^\circ)=4\sqrt{2}\sin^3 15^\circ-3\sqrt{2}\sin15^\circ+2$
$=-\sqrt{2}(3\sin15^\circ-4\sin^3 15^\circ)+2$
$=-\sqrt{2}\sin(3\times15^\circ)+2=-\sqrt{2}\sin45^\circ+2=-\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}+2$
$=1$

故選(A)

2. (　　)$\sin37.5^\circ\sin7.5^\circ+\cos37.5^\circ\cos7.5^\circ=$ (A) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ (B) $\dfrac{1}{2}$ (C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (E) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$。【中山女高】

答案：(D)

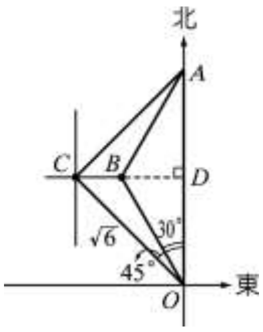
解析：$\sin37.5^\circ\sin7.5^\circ+\cos37.5^\circ\cos7.5^\circ=\cos(37.5^\circ-7.5^\circ)=\cos30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

故選(D)

3. (　　)一人見目標 A 在其正北，目標 B 在其北 30° 西，此人向西北方向行 $\sqrt{6}$ 公里，見 A 在其東北，B 在正東，則 A 與 B 之距離為多少公里？ (A) 1 (B) $\dfrac{3}{2}$ (C) $\sqrt{6}$ (D) 2 (E) 4。

答案：(D)

解析：



如圖，

$\angle OCA=45^\circ+45^\circ=90^\circ$

$\angle COA=45^\circ$，$\angle CAO=45^\circ$

$\Rightarrow\triangle CAO$ 為等腰直角三角形 $\Rightarrow\overline{DA}=\overline{DO}$

$\because\overline{DA}=\overline{DO}$，$\overline{BD}=\overline{BD}$，$\angle BDA=\angle BDO=90^\circ$

$\therefore\triangle BDA\cong\triangle BDO$ (SAS)

$\Rightarrow\overline{BA}=\overline{BO}$

又 $\overline{DO}=\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}=\sqrt{3}$

$\cos30^\circ=\dfrac{\overline{DO}}{\overline{BO}}$

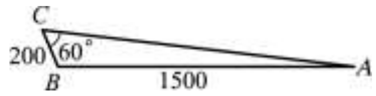
$\therefore\overline{BA}=\overline{BO}=\dfrac{\overline{DO}}{\cos30^\circ}=\dfrac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2$（公里）

故選(D)

4. (　　)平面上有 A，B，C 三點。已知 B，C 之間的距離是 200 公尺，B，A 之間的距離是 1500 公尺，$\angle ACB$ 等於 60°。請問 A，C 之間距離的最佳近似值是哪一個選項？ (A) 1500 公尺 (B) 1600 公尺 (C) 1700 公尺 (D) 1800 公尺。

答案：(B)

解析：



$\overline{AB}^2=\overline{CB}^2+\overline{CA}^2-2\cdot\overline{CB}\cdot\overline{CA}\cos60^\circ$

$1500^2=200^2+\overline{CA}^2-2\cdot200\cdot\overline{CA}\cdot\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow1500^2=200^2+\overline{CA}^2-200\overline{CA}$

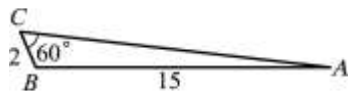
$\Rightarrow\overline{CA}^2-200\overline{CA}+200^2-1500^2=0$

$\Rightarrow\overline{CA}^2-200\overline{CA}-2210000=0$

$\Rightarrow\overline{CA}=\dfrac{200\pm\sqrt{200^2+4\cdot2210000}}{2}\approx1590\approx1600$

故選(B)

【另解】



考慮$\triangle PQR\sim\triangle ABC$

且 $\overline{PQ}=\dfrac{1}{100}\overline{AB}$，$\overline{QR}=\dfrac{1}{100}\overline{BC}$，$\overline{RP}=\dfrac{1}{100}\overline{CA}$

$\overline{PQ}^2=\overline{RQ}^2+\overline{RP}^2-2\cdot\overline{RQ}\cdot\overline{RP}\cdot\cos60^\circ$

$\Rightarrow15^2=2^2+\overline{RP}^2-2\cdot2\cdot\overline{RP}\cdot\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow\overline{RP}^2-2\overline{RP}-221=0$

$\Rightarrow\overline{RP}=\dfrac{2\pm\sqrt{2^2+4\cdot221}}{2}\approx15.90$

$\Rightarrow\overline{CA}=100\overline{RP}\approx1590\approx1600$（公尺）

5. (　　)下列五條直線中，哪一條直線斜率最大？ (A) L_1：$2x+5y=7$ (B) L_2：$y-2=0$ (C) L_3：$3x-6y+5=0$ (D) L_4：$3x-y=13$ (E) L_5：$x+3y=2$。【金甌女中】

答案：(D)

解析：$m_1=-\dfrac{2}{5}$，$m_2=0$，$m_3=\dfrac{-3}{-6}=\dfrac{1}{2}$，$m_4=\dfrac{-3}{-1}=3$，$m_5=-\dfrac{1}{3}$

因為 $3>\dfrac{1}{2}>0>-\dfrac{1}{3}>-\dfrac{2}{5}$，所以 $m_4>m_3>m_2>m_5>m_1$

故選(D)

二、 填充題：每格 10 分，共 50 分

1. 英台於她家樓頂觀看正東方公園入口 A 處測得仰角為 45°，觀看東 30° 南超商 B 處測得仰角為 60°，已知 A 與 B 相距 100 公尺，則英台家樓頂有【　　　　】公尺高。【嘉義女中】

答案：$100\sqrt{3}$

解析：設樓高 $\overline{CD}=x$ 公尺

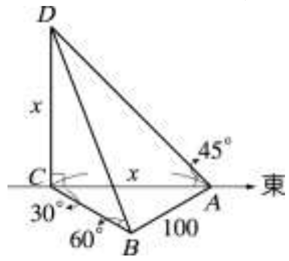
則 $\overline{AC}=\dfrac{\overline{CD}}{\tan 45^\circ}=x$，$\overline{BC}=\dfrac{\overline{CD}}{\tan 60^\circ}=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$

又 $\angle ACB=30^\circ$，由餘弦定理知，

$100^2=x^2+\left(\dfrac{x}{\sqrt{3}}\right)^2-2\cdot x\cdot\dfrac{x}{\sqrt{3}}\cos30^\circ=x^2+\dfrac{x^2}{3}-x^2$

$=\dfrac{x^2}{3}$

$\Rightarrow x^2=3\cdot100^2\Rightarrow x=100\sqrt{3}$（公尺）



2. 若兩直線 $kx+3y-1=0$ 與 $2x+y+2=0$ 互相垂直，則 $k=$【　　　　】。

答案：$-\dfrac{3}{2}$

解析：兩直線垂直，斜率乘積為 -1

$\Rightarrow\left(-\dfrac{k}{3}\right)\times\left(-\dfrac{2}{1}\right)=-1\Rightarrow k=-\dfrac{3}{2}$

3. 設 $\cos\left(\alpha-\dfrac{\beta}{2}\right)=-\dfrac{1}{9}$，$\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}-\beta\right)=\dfrac{2}{3}$，且 $90^\circ<\alpha<180^\circ$，$0^\circ<\beta<90^\circ$，則 $\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}=$【　　　　】。

答案：$\dfrac{22}{27}$

解析：$90^\circ<\alpha<180^\circ$ 且 $0^\circ<\beta<90^\circ\Rightarrow 45^\circ<\dfrac{\alpha}{2}<90^\circ$ 且 $0^\circ<\dfrac{\beta}{2}<45^\circ$

$\Rightarrow 45^\circ<\alpha-\dfrac{\beta}{2}<180^\circ$，$-45^\circ<\dfrac{\alpha}{2}-\beta<90^\circ$

由 $\cos\left(\alpha-\dfrac{\beta}{2}\right)=-\dfrac{1}{9}$ 與 $\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}-\beta\right)=\dfrac{2}{3}$，可得

$\sin\left(\alpha-\dfrac{\beta}{2}\right)=\dfrac{4\sqrt{5}}{9}$，$\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}-\beta\right)=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

所以 $\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\sin\left[\left(\alpha-\dfrac{\beta}{2}\right)-\left(\dfrac{\alpha}{2}-\beta\right)\right]$

$=\sin\left(\alpha-\dfrac{\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}-\beta\right)-\cos\left(\alpha-\dfrac{\beta}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}-\beta\right)$

$=\dfrac{4\sqrt{5}}{9}\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{3}-\left(-\dfrac{1}{9}\right)\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{22}{27}$

4. $\triangle ABC$ 中，過 B 的高之方程式為 $5x-10y+2=0$，過 A 的角平分線為 $x+y=0$，又 C（0，2），則 B 坐標為【　　】。【臺中一中】

答案：$\left(\dfrac{-6}{5},\dfrac{-2}{5}\right)$

解析：由過 B 之高可得直線 AC：$2x+y-2=0$，再與 $x+y=0$ 交點可得 A（2，-2）

又 C 對於 $x+y=0$ 之對稱點 C'（-2，0）在直線 AB 上，可得直線 AB：$x+2y=-2$

求 $x+2y=-2$ 與 $5x-10y+2=0$ 的交點可得

$B\left(\dfrac{-6}{5},\dfrac{-2}{5}\right)$

5. $\sin10^\circ\sin30^\circ\sin50^\circ\sin70^\circ$ 之值為【　　　　】。

答案：$\dfrac{1}{16}$

解析：$\sin10^\circ\sin30^\circ\sin50^\circ\sin70^\circ$

$=\sin30^\circ\cdot(\sin10^\circ\sin50^\circ\sin70^\circ)$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{4}\sin(3\cdot10^\circ)\right)=\dfrac{1}{8}\sin30^\circ=\dfrac{1}{16}$