

一、單選題 (5 題 每題 10 分 共 50 分)

- () 1. 試問共有幾個角度 θ 滿足 $0^\circ < \theta < 180^\circ$, 且 $\cos(3\theta - 60^\circ), \cos 3\theta, \cos(3\theta + 60^\circ)$ 依序成一等差數列? (1)1 個 (2)2 個 (3)3 個 (4)4 個 (5)5 個.

【107 學測】

解答 3

解析 因為 $\cos(3\theta - 60^\circ), \cos 3\theta, \cos(3\theta + 60^\circ)$ 成等差數列,

所以 $\cos(3\theta - 60^\circ) + \cos(3\theta + 60^\circ) = 2\cos 3\theta$.

利用和角公式展開, 得 $(\cos 3\theta \cos 60^\circ + \sin 3\theta \sin 60^\circ) + (\cos 3\theta \cos 60^\circ - \sin 3\theta \sin 60^\circ) = 2\cos 3\theta$,

整理得 $2\cos 3\theta \cos 60^\circ = 2\cos 3\theta \Rightarrow \cos 3\theta = 0$.

因為 $0^\circ < \theta < 180^\circ \Rightarrow 0^\circ < 3\theta < 540^\circ$, 所以 $3\theta = 90^\circ, 270^\circ, 450^\circ \Rightarrow \theta = 30^\circ, 90^\circ, 150^\circ$.

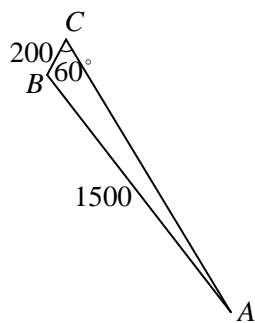
故選(3).

- () 2. 平面上有 A, B, C 三點. 已知 B, C 之間的距離是 200 公尺, B, A 之間的距離是 1500 公尺, $\angle ACB = 60^\circ$. 請問 A, C 之間距離最接近哪一個選項? (1)1500 公尺. (2)1600 公尺. (3)1700 公尺. (4)1800 公尺.

【課堂講義】

解答 2

解析 設 $\overline{AC} = x$.



利用餘弦定理得知,

$$\cos 60^\circ = \frac{200^2 + x^2 - 1500^2}{2 \times 200 \times x} \Rightarrow 200x = x^2 - 2210000,$$

$$\text{即 } x^2 - 200x - 2210000 = 0,$$

$$\text{解得 } x = \frac{200 \pm \sqrt{200^2 + 4 \times 2210000}}{2}$$

$$= 100 \pm \sqrt{10000 + 2210000} = 100 \pm 100\sqrt{222} \quad (\text{負不合})$$

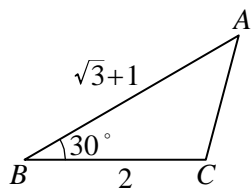
因為 $\sqrt{222} \approx 15$, 所以 $x \approx 100 + 100 \cdot 15 = 1600$. 故選(2).

- () 3. $\triangle ABC$ 中, $\overline{AB} = \sqrt{3} + 1, \overline{BC} = 2, \angle B = 30^\circ$, 求 $\angle A =$ (1) 30° (2) 45° (3) 60° (4) 120° (5) 150° .

【課本類題】

解答 2

解析 由餘弦定理 $\overline{AC}^2 = (\sqrt{3} + 1)^2 + 2^2 - 2 \times 2 \times (\sqrt{3} + 1) \times \cos 30^\circ = 2$



$$\therefore \overline{AC} = \sqrt{2}$$

$$\text{由正弦定理 } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \frac{2}{\sin A} = \frac{\sqrt{2}}{\sin 30^\circ} \Rightarrow \sin A = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \angle A = 45^\circ \text{ 或 } 135^\circ, \text{ 但 } \sqrt{3}+1 > 2 \Rightarrow \angle C > \angle A \Rightarrow \angle A = 135^\circ \text{ (不合)}$$

故選(2)。

() 4. $\cos 60^\circ + \frac{1}{\tan 60^\circ \times \cos 30^\circ}$ 之值為 (1)2 (2) $\frac{3}{2}$ (3) $\frac{5}{2}$ (4) $\frac{7}{6}$.

【課本類題】

解答 4

解析 原式 = $\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{7}{6}$

故選(4)。

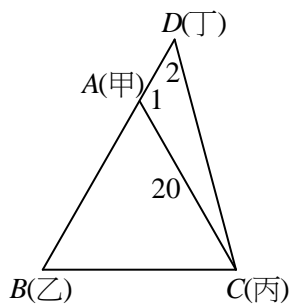
- () 5. 假設甲、乙、丙三鎮兩兩之間的距離皆為 20 公里。兩條筆直的公路交於丁鎮，其中之一通過甲、乙兩鎮而另一通過丙鎮。今在一比例精準的地圖上量得兩公路的夾角為 45° ，則丙、丁兩鎮間的距離約為 (1)24.5 公里 (2)25 公里 (3)25.5 公里 (4)26 公里 (5)26.5 公里。

【98 學測】

解答 1

解析 $\triangle ACD$ 中 $\angle 1 = 120^\circ$, $\angle 2 = 45^\circ$, $\overline{AC} = 20$,

$$\text{由正弦定理知 } \frac{20}{\sin 45^\circ} = \frac{\overline{CD}}{\sin 120^\circ} \Rightarrow \overline{CD} = \frac{20\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 10\sqrt{6} \approx 24.5, \text{ 故選(1).}$$



二、填充題 (5 題 每題 10 分 共 50 分)

1. 求 $\cos 60^\circ - \tan 45^\circ + \cos 30^\circ - \sin 30^\circ =$ _____ .

【課本類題】

解答 $\frac{\sqrt{3}}{2} - 1$ 2. 點 $P(a, b)$ 為 θ 角終邊與直線 $y = -12$ 的交點且 $\cos \theta = -\frac{5}{13}$, 求數對 $(a, b) =$ _____ .

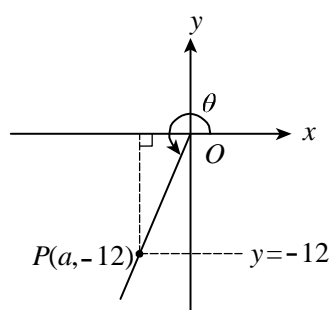
【課本類題】

解答 $(-5, -12)$ **解析** 原式 $= \frac{1}{2} - 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$. 3. 在坐標平面上, θ 與有向角 18 (弧度) 同界, 且 $0 \leq \theta < 2\pi$, 求 $\theta =$

【課本類題】

解答 $18 - 4\pi$

解析 $\because b = -12, \cos \theta < 0 \therefore \theta$ 為第三象限角



$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 144}} = -\frac{5}{13}$$

$$\Rightarrow 13a = -5\sqrt{a^2 + 144} \Rightarrow 169a^2 = 25(a^2 + 144) \Rightarrow a = \pm 5 \text{ (取負)}$$

$\therefore (a, b) = (-5, -12)$.

解析 $\theta = 18 - 4\pi$.

4. 求 $2\sin 30^\circ \cdot \cos 60^\circ + 3\tan 60^\circ \cdot \tan 30^\circ - \sqrt{2} \sin 45^\circ =$ _____ .

【課本類題】

解答 $\frac{5}{2}$

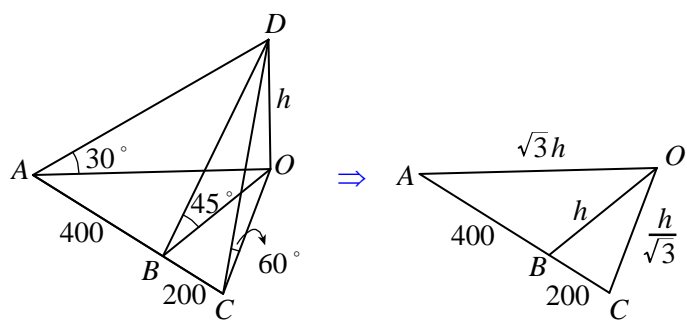
解析 原式 $= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5}{2}$.

5. 從地面一直線上三點 A, B, C , 測得一山頂之仰角分別為 $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$, 已知 A, B, C 與山腳不共線, $\overline{AB} = 400$ 公尺, $\overline{BC} = 200$ 公尺, 求山高為 _____ 公尺.

【課本類題】

解答 600

解析 令山高 $\overline{OD} = h$ 公尺



$$\text{則 } \overline{OA} = \sqrt{3}h, \overline{OB} = h, \overline{OC} = \frac{h}{\sqrt{3}}$$

$$\cos A = \frac{(\sqrt{3}h)^2 + 400^2 - h^2}{2 \times \sqrt{3}h \times 400} = \frac{(\sqrt{3}h)^2 + 600^2 - (\frac{h}{\sqrt{3}})^2}{2 \times \sqrt{3}h \times 600}$$

(△AOB中) (△AOC中)

$$\Rightarrow \frac{2h^2 + 400^2}{2} = \frac{\frac{8}{3}h^2 + 600^2}{3} \Rightarrow 6h^2 + 3 \times 400^2 = \frac{16}{3}h^2 + 2 \times 600^2 \Rightarrow h^2 = 360000$$

⇒ $h = 600$ ，即山高為 600（公尺）。