1002 高毅甲 1-1~1-3 數學科 (詳解)　　年　　班　座號：　　　姓名：

一、 單一選擇題：每題 5 分，共 25 分

1. (　　)設 $0^\circ<\theta<90^\circ$，且能適合方程式 $2\cos\theta-1=k(2\cos\theta+1)$，則 k 值的範圍為　（A）$-1<k<1$　（B）$k>1$　（C）$k<\frac{1}{3}$　（D）$k>3$ 或 $k<\frac{1}{3}$　（E）$-1<k<\frac{1}{3}$。

答案：(E)

解析：$2\cos\theta-1=2k\cos\theta+k$

$\Rightarrow \cos\theta(2-2k)=k+1 \Rightarrow \cos\theta=\dfrac{1+k}{2-2k}$

$\because 0^\circ<\theta<90^\circ \quad \therefore 0<\cos\theta<1$

$$\Rightarrow 0<\frac{1+k}{2-2k}<1 \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{1+k}{2-2k}>0 \cdots\cdots\cdots\cdots① \\ \dfrac{1+k}{2-2k}<1 \cdots\cdots\cdots\cdots②\end{cases}$$

由①得 $(1+k)(2-2k)>0$

$\Rightarrow (k+1)(k-1)<0$

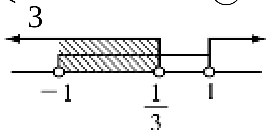
$\Rightarrow -1<k<1 \cdots\cdots\cdots\cdots③$

由②得 $\dfrac{1+k}{2-2k}-1<0$

$\Rightarrow \dfrac{3k-1}{2-2k}<0$

$\Rightarrow (3k-1)(k-1)>0$

$\Rightarrow k>1$ 或 $k<\frac{1}{3} \cdots\cdots\cdots\cdots④$



由③、④得 $-1<k<\frac{1}{3}$

故選(E)

2. (　　)已知一四邊形兩對角線長各為 4 及 6，兩對角線之夾角為 60°，則此四邊形之面積為　（A）$12\sqrt{3}$　（B）$6\sqrt{3}$　（C）6　（D）12。

答案：(B)

解析：四邊形面積 $=\frac{1}{2}$（兩對角線長度乘積）×（兩對角線夾角之正弦值）

$=\frac{1}{2}(4\times6\times\sin60^\circ)=6\sqrt{3}$

故選(B)

3. (　　)$\triangle ABC$ 中，試求 $a(b^2+c^2)\cos A+b(c^2+a^2)\cos B+c(a^2+b^2)\cos C=$　（A）abc　（B）$a^2b^2c^2$　（C）$2abc$　（D）$3abc$　（E）以上皆非。

答案：(D)

解析：$a(b^2+c^2)\cos A+b(c^2+a^2)\cos B+c(a^2+b^2)\cos C$

$=ab^2\cos A+ac^2\cos A+bc^2\cos B+ba^2\cos B+ca^2\cos C+cb^2\cos C$

$=(ab^2\cos A+ba^2\cos B)+(ac^2\cos A+ca^2\cos C)+(bc^2\cos B+cb^2\cos C)$

$=ab(b\cos A+a\cos B)+ac(c\cos A+a\cos C)+bc(c\cos B+b\cos C)$

$$由投影定理知\begin{cases}a=b\cos C+c\cos B \\ b=a\cos C+c\cos A \\ c=a\cos B+b\cos A\end{cases}$$

$\Rightarrow$ 原式 $=ab\cdot c+ac\cdot b+bc\cdot a=3abc$

故選(D)

4. (　　)化簡：$\sum_{k=1}^{60}\cos(3k)^\circ=$　（A）2　（B）1　（C）0　（D）-1　（E）-2。【高雄中學】

答案：(D)

解析：$\sum_{k=1}^{60}\cos(3k)^\circ=\cos3^\circ+\cos6^\circ+\cos9^\circ+\cdots\cdots+\cos87^\circ+\cos90^\circ+\cos93^\circ+\cdots\cdots+\cos174^\circ+\cos177^\circ+\cos180^\circ$

$=\cos3^\circ+\cos6^\circ+\cos9^\circ+\cdots\cdots+\cos87^\circ+\cos90^\circ+\cos(180^\circ-87^\circ)+\cdots\cdots+\cos(180^\circ-6^\circ)+\cos(180^\circ-3^\circ)+\cos180^\circ$

$=\cos3^\circ+\cos6^\circ+\cos9^\circ+\cdots\cdots+\cos87^\circ+0-\cos87^\circ-\cdots\cdots-\cos6^\circ-\cos3^\circ-1$

$=0-1=-1$，故選(D)

5. (　　)在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C$ 為直角，設 a、b、c 是 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的對邊長且 $a<b$，下列選項何者正確？　（A）$\sin A>\sin B$　（B）$\sin A>\cos B$　（C）$\tan A>\tan B$　（D）$\sin A<\tan A$　（E）$\cos A>\tan A$。

答案：(D)

解析：$\angle C=90^\circ \Rightarrow \angle A+\angle B=90^\circ$

$\angle A$、$\angle B$ 皆為銳角

（A）╳：$\because \dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$

又 $a<b \quad \therefore \sin A<\sin B \Rightarrow \angle A<\angle B$

（B）╳：$\because \angle A+\angle B=90^\circ$

$\therefore \sin A=\sin(90^\circ-\angle B)=\cos B$

（C）╳：$\because 0^\circ<\angle A<\angle B<90^\circ \quad \therefore \tan A<\tan B$

（D）○：$\tan A=\dfrac{\sin A}{\cos A}>\dfrac{\sin A}{1}=\sin A$

（E）╳：$\tan A=\dfrac{\sin A}{\cos A}$ 與 $\cos A$ 無法判斷大小

如 $\tan30^\circ<\cos30^\circ$，$\tan60^\circ>\cos60^\circ$

故選(D)

二、 多重選擇題：每題 7 分，共 21 分

1. (　　)對 $\triangle ABC$ 而言，下列敘述何者正確？　（A）若 $\sin A>0$，則 $\angle A$ 必為銳角　（B）若 $\cos A>0$，則 $\angle A$ 必為銳角　（C）若 $\sin(B-C)=1$，則 $\triangle ABC$ 為直角三角形　（D）若 $\cos(B-C)=1$，則 $\triangle ABC$ 為等腰三角形　（E）$\cos A=\cos(B+C)$。【新竹高中】

答案：(B)(D)

解析：（A）╳：$\sin A>0 \Rightarrow 0^\circ<\angle A<180^\circ$，$\angle A$ 未必為銳角

（B）○：$\cos A>0$ 且 $0^\circ<\angle A<180^\circ \Rightarrow 0^\circ<\angle A<90^\circ$。

（C）╳：$\sin\theta(B-C)=1 \Rightarrow \angle B-\angle C=90^\circ \Rightarrow$

$\angle B=90^\circ+\angle C$，為鈍角三角形

（D）○：$\cos(B-C)=1\Rightarrow\angle B-\angle C=0^\circ\Rightarrow\angle B=\angle C$

（E）╳：$\cos(B+C)=\cos(180^\circ-A)=-\cos A$

故選(B)(D)

2. (　)在$\triangle ABC$中，已知三邊長為$a=7$，$b=8$，$c=9$，問下列有關$\triangle ABC$的敘述何者正確？（A)面積為$10\sqrt{5}$　(B)外接圓半徑$R=\dfrac{21\sqrt{5}}{10}$　(C)內切圓半徑$r=\sqrt{5}$　(D)$\cos A=\dfrac{1}{2}$　(E)若$\overline{AC}$的中點為M，中線長$\overline{BM}=7$。【臺中二中】

答案：(B)(C)(E)

解析：(A)╳：$s=\dfrac{a+b+c}{2}=\dfrac{7+8+9}{2}=12$

$\triangle ABC=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$=\sqrt{12\cdot5\cdot4\cdot3}=12\sqrt{5}$

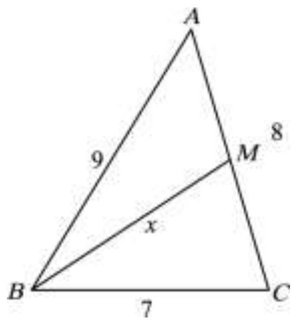
(B)○：$R=\dfrac{abc}{4\cdot\triangle ABC}=\dfrac{7\cdot8\cdot9}{4\cdot12\sqrt{5}}=\dfrac{21\sqrt{5}}{10}$

(C)○：$\triangle ABC=r\cdot s$

$\Rightarrow 12\sqrt{5}=r\cdot12\Rightarrow r=\sqrt{5}$

(D)╳：$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{8^2+9^2-7^2}{2\cdot8\cdot9}=\dfrac{2}{3}$

(E)○：設$\overline{BM}=x$



由餘弦定理可知$\cos C=\dfrac{7^2+4^2-x^2}{2\cdot7\cdot4}=\dfrac{7^2+8^2-9^2}{2\cdot7\cdot8}$

$\Rightarrow 8(49+16-x^2)=4(49+64-81)$

$\Rightarrow x^2=49\Rightarrow x=7$，故$\overline{BM}=7$

故選(B)(C)(E)

3. (　)在極坐標平面上，有極點O及兩點$A[4，30^\circ]$，$B[6，150^\circ]$，選出正確的選項。（A)B的直角坐標為$(-3\sqrt{3}，3)$　(B)若有一點D，其直角坐標為$(-2，-2)$，則其極坐標為$[2\sqrt{2}，225^\circ]$　(C)$\triangle ABO$的面積為$4\sqrt{3}$　(D)$\overline{AB}=2\sqrt{19}$　(E)若$\overline{OC}$為$\angle AOB$的角平分線，C在$\overline{AB}$上，則$\overline{OC}$的長度為$\dfrac{12}{5}$。

答案：(A)(B)(D)(E)

解析：(A)○：$B(6\times\cos150^\circ，6\times\sin150^\circ)$

$\Rightarrow B(-3\sqrt{3}，3)$

(B)○：$r=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}$，$\theta=225^\circ$

$\Rightarrow D[2\sqrt{2}，225^\circ]$

(C)╳：$150^\circ-30^\circ=120^\circ$

$\Rightarrow\triangle ABO$面積$=\dfrac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{OB}\times\sin120^\circ$

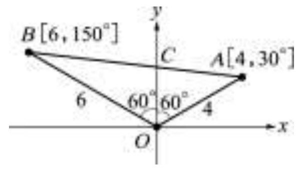
$=\dfrac{1}{2}\times4\times6\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$

(D)○：由餘弦定理知

$\overline{AB}^2=6^2+4^2-2\times6\times4\times\cos120^\circ=76$

$\Rightarrow\overline{AB}=2\sqrt{19}$

(E)○：$\angle AOC=\angle COB=60^\circ$



$\triangle ABO$面積$=\triangle AOC$面積$+\triangle COB$面積

$\Rightarrow\dfrac{1}{2}\times6\times4\times\sin120^\circ$

$=\dfrac{1}{2}\times4\times\overline{OC}\times\sin60^\circ+\dfrac{1}{2}\times6\times\overline{OC}\times\sin60^\circ$

$\Rightarrow\overline{OC}=\dfrac{12}{5}$

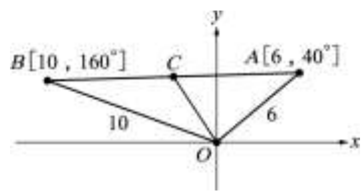
故選(A)(B)(D)(E)

三、填充題：每格 6 分，共 54 分

1. 在極坐標平面上，極點O及兩點$A[6，40^\circ]$，$B[10，160^\circ]$，C為$\overline{AB}$中點，則$\overline{OC}=$【　　　　】。

答案：$\sqrt{19}$

解析：



$\because\angle AOB=160^\circ-40^\circ=120^\circ$

由餘弦定理知，

$\overline{AB}^2=6^2+10^2-2\times6\times10\times\cos120^\circ$

$=136-120\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=196$

$\Rightarrow\overline{AB}=14$

由中線定理知

$\Rightarrow\overline{OA}^2+\overline{OB}^2=2(\overline{OC}^2+\overline{AC}^2)$

$\Rightarrow 6^2+10^2=2(\overline{OC}^2+7^2)$

$\Rightarrow\overline{OC}^2+49=\dfrac{136}{2}$

$\Rightarrow\overline{OC}^2=19$

$\Rightarrow\overline{OC}=\sqrt{19}$

2. 邊長為 4 的正六邊形$ABCDEF$，正三角形PQR內接於此正六邊形且P在$\overline{AB}$上、Q在$\overline{CD}$上、R在$\overline{EF}$上，已知$\overline{AP}：\overline{PB}=3：1$，則正三角形$PQR$的面積為【　　】。【臺中女中】

答案：$\dfrac{39\sqrt{3}}{4}$

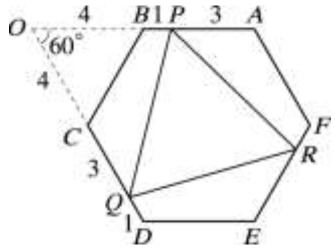
解析：延長$\overline{AB}$、$\overline{CD}$至O點，$\angle POQ=60^\circ$

$\overline{OP}=5$，$\overline{OQ}=7$，由餘弦定理知，

$\overline{PQ}^2=5^2+7^2-2\cdot5\cdot7\cdot\cos60^\circ$

$=39$

$\triangle PQR$面積$=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\overline{PQ}^2=\dfrac{39\sqrt{3}}{4}$



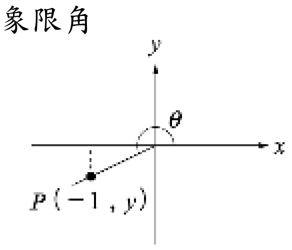
3. 若點 P（-1，y）為 θ 終邊上之一點，又 $\sin\theta=-\dfrac{5}{13}$，則 $y=$【　　　　】。【臺中一中】

答案：$-\dfrac{5}{12}$

解析：P（-1，y）在第二或第三象限，

又 $\sin\theta=-\dfrac{5}{13}<0\Rightarrow y<0$

故 θ 為第三象限角



$r=\sqrt{(-1)^2+y^2}=\sqrt{1+y^2}$

$\sin\theta=\dfrac{y}{r}=\dfrac{y}{\sqrt{1+y^2}}=-\dfrac{5}{13}$

$\Rightarrow\dfrac{y^2}{1+y^2}=\dfrac{25}{169}\Rightarrow 169y^2=25+25y^2\Rightarrow 144y^2=25$

$\Rightarrow y^2=\dfrac{25}{144}\Rightarrow y=\pm\dfrac{5}{12}$（取負）

$\therefore y=-\dfrac{5}{12}$

4. 在△ABC 中，M 為 $\overline{BC}$ 邊之中點，若 $\overline{AB}=2$，$\overline{AC}=3$，且 $\cos\angle BAC=-\dfrac{1}{4}$，則：

（1）中線 $\overline{AM}$ 長度為【　　　　】。

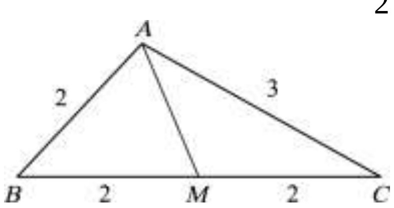
（2）$\tan\angle BAM=$【　　　　】。【臺中二中】

答案：（1）$\dfrac{\sqrt{10}}{2}$；（2）$\dfrac{3\sqrt{15}}{5}$

解析：由餘弦定理，

$\overline{BC}^2=2^2+3^2-2\cdot2\cdot3\cdot\cos\angle BAC=4+9-12\cdot\left(-\dfrac{1}{4}\right)=16$

$\Rightarrow\overline{BC}=\sqrt{16}=4$，則 $\overline{BM}=\overline{MC}=\dfrac{4}{2}=2$



（1）由餘弦定理可知

$\cos B=\dfrac{2^2+2^2-\overline{AM}^2}{2\times2\times2}=\dfrac{2^2+4^2-3^2}{2\times2\times4}$

$\Rightarrow 2\left(4+4-\overline{AM}^2\right)=4+16^2-9$

$\Rightarrow\overline{AM}^2=\dfrac{5}{2}\Rightarrow\overline{AM}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

（2）$\cos\angle BAM=\dfrac{2^2+\left(\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)^2-2^2}{2\cdot2\cdot\left(\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)}=\dfrac{\dfrac{5}{2}}{2\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{10}}{8}$

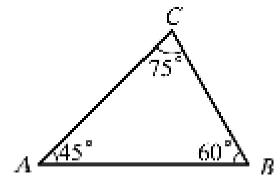
$\Rightarrow\sin\angle BAM=\sqrt{1-\cos^2\angle BAM}=\sqrt{1-\dfrac{10}{64}}=\sqrt{\dfrac{54}{64}}=\dfrac{3\sqrt{6}}{8}$

故 $\tan\angle BAM=\dfrac{\sin\angle BAM}{\cos\angle BAM}=\dfrac{\dfrac{3\sqrt{6}}{8}}{\dfrac{\sqrt{10}}{8}}=\dfrac{3\sqrt{6}}{\sqrt{10}}=\dfrac{3\sqrt{15}}{5}$

5. △ABC 中，$\angle A=45^\circ$，$\angle B=60^\circ$，外接圓半徑為 4，則△ABC 的面積為【　　　　】。

答案：$4(3+\sqrt{3})$

解析：



$\angle C=180^\circ-45^\circ-60^\circ=75^\circ$

△ABC 之外接圓半徑為 4

$\Rightarrow\dfrac{a}{\sin45^\circ}=\dfrac{b}{\sin60^\circ}=\dfrac{c}{\sin75^\circ}=2R$

$\Rightarrow\begin{cases}a=8\cdot\sin45^\circ=4\sqrt{2}\\c=8\cdot\sin75^\circ=2(\sqrt{6}+\sqrt{2})\end{cases}$

△$ABC=\dfrac{1}{2}ac\sin60^\circ=\dfrac{1}{2}\cdot4\sqrt{2}\cdot2(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$=2\sqrt{2}\cdot(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cdot\sqrt{3}=4(\sqrt{3}+1)\cdot\sqrt{3}=4(3+\sqrt{3})$

6. 求 $\sin^2 25^\circ+\sin^2 65^\circ-\tan^2 60^\circ=$【　　　　】。【北一女中】

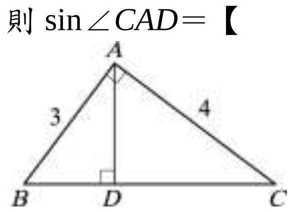
答案：-2

解析：$\sin^2 25^\circ+\sin^2 65^\circ-\tan^2 60^\circ$

$=\cos^2 65^\circ+\sin^2 65^\circ-\tan^2 60^\circ$

$=1-(\sqrt{3})^2=-2$

7. 如圖，△ABC 為直角三角形，其中 $\overline{AB}=3$，$\overline{AC}=4$，且 $\overline{AD}\perp\overline{BC}$，則 $\sin\angle CAD=$【　　　　】。



答案：$\dfrac{4}{5}$

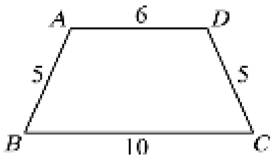
解析：$\angle CAD+\angle BAD=\angle B+\angle BAD=90^\circ$

$\Rightarrow\angle CAD=\angle B$

$\therefore\sin\angle CAD=\sin B=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\dfrac{4}{5}$

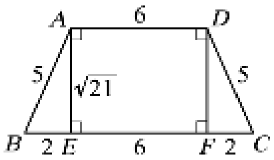
8. 如圖所示，$ABCD$ 為一等腰梯形，試求 $\cos\angle BAD=$【

】。【松山高中】



答案：$-\dfrac{2}{5}$

$\boxed{\text{解析}}$：



設 E，F 分別為 A，D 在 $\overline{BC}$ 上之垂足點

$\cos\angle BAD=\cos(\angle BAE+90^\circ)=-\sin\angle BAE=-\dfrac{2}{5}$