0930 三角函數　學測歷屆試題 班級　　　姓名　　　　座號

一、單選題 (10 題 每題 10 分 共 100 分)

(　　　) 1.令 $a=\cos\pi^2$，試問下列哪一個選項是對的?　(1)$a=-1$　(2)$-1<a\le-\frac{1}{2}$　(3)$-\frac{1}{2}<a\le 0$　(4)$0<a\le\frac{1}{2}$　(5)$\frac{1}{2}<a\le 1$．

【98 學測】

解答　2

解析　$a=\cos\pi^2=\cos 9.86$，

$\pi^2=3.14\times3.14\approx9.86$ 為第三象限角，且 $3\pi\le 9.86\le\frac{10}{3}\pi$，

$\therefore -1\le a\le-\frac{1}{2}$，故選(2)．

(　　　)2.試問共有幾個角度 θ 滿足 $0°<\theta<180°$，且 $\cos(3\theta-60°)$，$\cos3\theta$，$\cos(3\theta+60°)$依序成一等差數列?　(1)1 個　(2)2 個　(3)3 個　(4)4 個　(5)5 個．

【107 學測】

解答　3

解析　因為 $\cos(3\theta-60°)$，$\cos3\theta$，$\cos(3\theta+60°)$成等差數列，

所以 $\cos(3\theta-60°)+\cos(3\theta+60°)=2\cos3\theta$．

利用和角公式展開，得$(\cos3\theta\cos60°+\sin3\theta\sin60°)+(\cos3\theta\cos60°-\sin3\theta\sin60°)=2\cos3\theta$，

整理得 $2\cos3\theta\cos60°=2\cos3\theta\Rightarrow\cos3\theta=0$．

因為 $0°<\theta<180°\Rightarrow0°<3\theta<540°$，所以 $3\theta=90°$，$270°$，$450°\Rightarrow\theta=30°$，$90°$，$150°$．

故選(3)．

(　　　) 3.令 $a=\cos(\pi^2)$，試問下列哪一個選項是對的?　(1)$a=-1$　(2)$-1<a\le-\frac{1}{2}$　(3)$-\frac{1}{2}<a\le0$　(4)$0<a\le\frac{1}{2}$　(5)$\frac{1}{2}<a\le1$．

【98 學測】

解答　2

解析　$a=\cos(\pi^2)=\cos(9.86)$，

$\pi^2=3.14\times3.14\fallingdotseq9.86$ 為第三象限角且 $3\pi\le9.86\le\frac{10}{3}\pi$，$\therefore -1\le a\le-\frac{1}{2}$，

故選(2)．

(　　　) 4.莎韻觀測遠方等速率垂直上升的熱氣球．在上午 10：00 熱氣球的仰角為 30°，到上午 10：10 仰角變成 34°．請利用下表判斷到上午 10：30 時，熱氣球的仰角最接近下列哪一個度數？　(1)39°　(2)40°　(3)41°　(4)42°　(5)43°．

θ	30°	34°	39°	40°	41°	42°	43°
$\sin\theta$	0.500	0.559	0.629	0.643	0.656	0.669	0.682
$\cos\theta$	0.866	0.829	0.777	0.766	0.755	0.743	0.731
$\tan\theta$	0.577	0.675	0.810	0.839	0.869	0.900	0.933

【102 學測】

解答　3

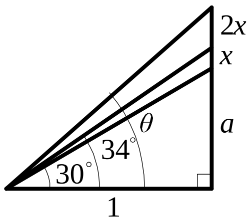
解析　如圖，設底邊為 1，10：00 時熱氣球高 a，10：10 升高 x，

則 10：30 再升高 $2x$．因為$\begin{cases}a=\tan30°=0.577\\a+x=\tan34°=0.675\end{cases}$，

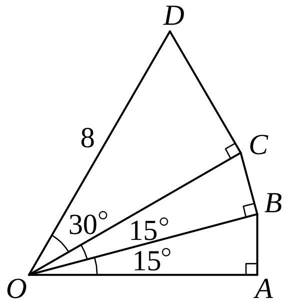
所以 $x=0.675-0.577=0.098$．因此，

$a+3x=0.577+3\times0.098=0.871\approx\tan41°$．

故選(3)．



(　　　)5.下圖是由三個直角三角形堆疊而成的圖形，且 $\overline{OD}=8$．問：直角三角形 OAB 的高 $\overline{AB}$ 為何?　(1)1　(2)$\sqrt{6}-\sqrt{2}$　(3)$\sqrt{7}-1$　(4)$\sqrt{3}$　(5)2．



【學測】

解答　4

解析　$\triangle OCD$ 中，$\overline{OC}=4\sqrt{3}$，

$\triangle OBC$ 中，$\overline{OB}=\overline{OC}\cdot\cos15°=4\sqrt{3}\cos15°$，

$\triangle OAB$ 中，$\overline{AB}=\overline{OB}\cdot\sin15°=(4\sqrt{3}\cdot\cos15°)\cdot\sin15°=2\sqrt{3}(2\sin15°\cdot\cos15°)=2\sqrt{3}\cdot\sin30°$

$$=2\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=\sqrt{3}，$$

故選(4)．

(　　　)6.廣場上插了一支紅旗與一支白旗，小明站在兩支旗子之間．利用手邊的儀器，小明測出他與正東方紅旗間的距離為他與正西方白旗間距離的 6 倍；小明往正北方走了 10 公尺之後再測量一次，發現他與紅旗的距離變成他與白旗距離的 4 倍．試問紅白兩旗之間的距離最接近下列哪個選項?　(1)60 公尺　(2)65 公尺　(3)70 公尺　(4)75 公尺　(5)80 公尺．

【學測】

解答　1

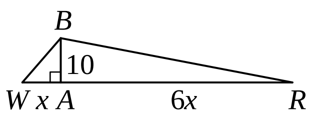
解析　如圖，設 $\overline{AW}=x$，則 $\overline{AR}=6x$，

$\overline{BR}^2=(6x)^2+10^2=36x^2+100$；$\overline{BW}^2=x^2+10^2=x^2+100$，

$\because \overline{BR}=4\overline{BW}$，$\therefore \overline{BR}^2=16\overline{BW}^2$

$\Rightarrow 36x^2+100=16(x^2+100)\Rightarrow x^2=75\Rightarrow x=5\sqrt{3}$，

紅白兩旗之間的距離為 $7x=35\sqrt{3}\approx60.6$ 公尺，故選(1)．



(　　　)7.試問有多少個實數 x 滿足 $\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{3\pi}{2}$ 且 $\cos x°\le\cos x$？　(1)0 個　(2)1 個　(3)2 個　(4)4 個　(5)無窮多個．

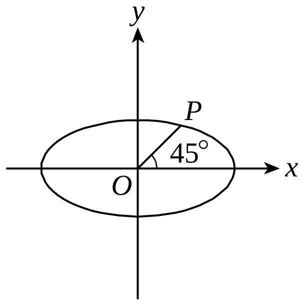
【106 學測】

解答　1

解析　因為 $\pi\approx3.14$，所以 $\frac{\pi}{2}\approx1.57$，$\frac{3\pi}{2}\approx4.71$，即 $x°$約介於 1.57°與 4.71°之間，因此 $\cos x°>0$．

又因為 $\frac{\pi}{2}$ 弧度 $\le x\le\frac{3\pi}{2}$ 弧度，所以 $\cos x<0$ 或 $\cos x=0$．於是 $\cos x°$恆大於 $\cos x$．故選(1)．

(　　　)8.在坐標平面上有一橢圓，它的長軸落在 x 軸上，短軸落在 y 軸上，長軸、短軸的長度分別為 4，2．如圖所示，通過橢圓的中心 O 且與 x 軸夾角為 45°的直線在第一象限跟橢圓相交於 P，則此交點 P 與中心 O 的距離為　(1)1.5　(2)$\sqrt{1.6}$　(3)$\sqrt{2}$　(4)$\sqrt{2.5}$　(5)$\sqrt{3.2}$．



【學測】

解答 2

解析 $\overrightarrow{OP}$ 斜角 45°，故 P 點坐標可設成(t,t)，$t>0$，

又 P 在 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$ 上，故 $\frac{t^2}{4}+\frac{t^2}{1}=1$，$t>0$，解得 $t=\sqrt{\frac{4}{5}}$，(　　　) 9.請問 sin73°，sin146°，sin219°，sin292°，sin365°這五個數值的中位數是哪一個?　(1)sin73°　(2)sin146°　(3)sin219°　(4)sin292°　(5)sin365°．

【105 學測】

則 $\overline{OP}=\sqrt{2}\times\sqrt{\frac{4}{5}}=\sqrt{\frac{8}{5}}=\sqrt{1.6}$，故選(2)．

解答 5

解析 利用換算公式，將角度化為銳角，得

$\sin146°=\sin(180°-34°)=\sin34°$，

$\sin219°=\sin(180°+39°)=-\sin39°$，

$\sin292°=\sin(360°-68°)=-\sin68°$，

$\sin365°=\sin(360°+5°)=\sin5°$．

因為在 0°～90°的範圍內，正弦值為正且角度愈大值愈大，

所以 $\sin73°>\sin146°>\sin365°>\sin219°>\sin292°$．

得知中位數為 sin365°，故選(5)．

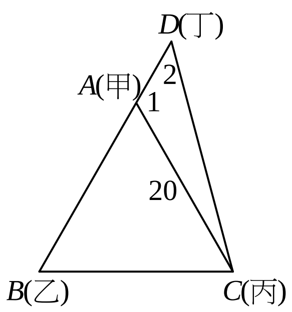
(　　　) 10.假設甲、乙、丙三鎮兩兩之間的距離皆為 20 公里．兩條筆直的公路交於丁鎮，其中之一通過甲、乙兩鎮而另一通過丙鎮．今在一比例精準的地圖上量得兩公路的夾角為 45°，則丙、丁兩鎮間的距離約為　(1)24.5 公里　(2)25 公里　(3)25.5 公里　(4)26 公里　(5)26.5 公里．

【98 學測】

解答 1

解析 $\triangle ACD$ 中 $\angle1=120°$，$\angle2=45°$，$\overline{AC}=20$，

由正弦定理知 $\frac{20}{\sin45°}=\frac{\overline{CD}}{\sin120°}\Rightarrow\overline{CD}=\frac{20\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=10\sqrt{6}\approx24.5$，故選(1)．



二、多選題 (9 題 每題 9 分 共 81 分)

(　　　) 1.下列哪些方程式有實數解?　(1)$x^3+x-1=0$　(2)$2^x+2^{-x}=0$　(3)$\log_2 x+\log_x 2=1$　(4)$\sin x+\cos2x=3$　(5)$4\sin x+3\cos x=\frac{9}{2}$．

【99 學測】

解答 15

解析 (1)○：三次實係數方程式至少有一實根

(2)╳：$2^x+2^{-x}\geq 2$，∴$2^x+2^{-x}=0$ 無解

(3)╳：令 $t=\log_2 x$，原式 $\Rightarrow t+\dfrac{1}{t}=1\Rightarrow t^2-t+1=0$，又 $D<0$，∴無實根

(4)╳：$\sin x\leq 1$，$\cos 2x\leq 1$，∴$\sin x+\cos 2x\leq 2$，∴$\sin x+\cos 2x=3$ 無解

(5)○：$-5\leq 4\sin x+3\cos x\leq 5$，∴$4\sin x+3\cos x=\dfrac{9}{2}$ 必有實數解

故選(1)(5)．

(　　) 2.在坐標平面上，廣義角 θ 的頂點為原點 O，始邊為 x 軸的正向，且滿足 $\tan\theta=\dfrac{2}{3}$．若 θ 的終邊上有一點 P，其 y 坐標為 -4，則下列哪些選項一定正確?　(1)P 的 x 坐標是 6　(2) $\overline{OP}=2\sqrt{13}$　(3) $\cos\theta=\dfrac{3}{\sqrt{13}}$　(4)$\sin 2\theta>0$　(5) $\cos\dfrac{\theta}{2}<0$

【101 學測】

解答 24

解析 ∵ $\tan\theta=\dfrac{2}{3}$，又 θ 終邊的 P 點，y 坐標為 -4

∴ θ 在第三象限

(1)╳，$\tan\theta=\dfrac{2}{3}=\dfrac{y}{x}=\dfrac{-4}{x}$ $\Rightarrow$ $x=-6$

∴ P 的 x 坐標為 -6

(2)○，$\overline{OP}=\sqrt{4^2+6^2}=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$

(3)╳，$\cos\theta=\dfrac{x}{\overline{OP}}=\dfrac{-6}{2\sqrt{13}}=\dfrac{-3}{\sqrt{13}}$

(4)○，$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2(\dfrac{-4}{2\sqrt{13}})(\dfrac{-6}{2\sqrt{13}})>0$

(5)╳，$180^\circ+360^\circ k<\theta<270^\circ+360^\circ k$，$k\in\mathbb{Z}$

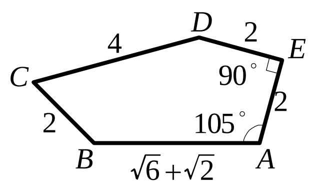
$90^\circ+180^\circ k<\dfrac{\theta}{2}<135^\circ+180^\circ k$，$k\in\mathbb{Z}$

當 $k=0$ 時，$\dfrac{\theta}{2}$ 在第二象限，$\cos\dfrac{\theta}{2}<0$

當 $k=1$ 時，$\dfrac{\theta}{2}$ 在第四象限，$\cos\dfrac{\theta}{2}>0$

故選(2)(4)

(　　)3.最近數學家發現一種新的可以無縫密鋪平面的凸五邊形 $ABCDE$，其示意圖如下．關於這五邊形，請選出正確的選項．　(1) $\overline{AD}=2\sqrt{2}$　(2)$\angle DAB=45^\circ$　(3) $\overline{BD}=2\sqrt{6}$　(4)$\angle ABD=45^\circ$　(5)$\triangle BCD$ 的面積為 $2\sqrt{2}$．



【106 學測】

解答 14

解析 (1)利用畢氏定理，得 $\overline{AD}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$．

(2)$\angle DAB=105^\circ-45^\circ=60^\circ$．

(3)利用餘弦定理，得

$$\overline{BD}^2=(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2-2(\sqrt{6}+\sqrt{2})(2\sqrt{2})\cos 60^\circ$$
$$=(8+4\sqrt{3})+8-(4\sqrt{3}+4)=12,$$

即 $\overline{BD}=2\sqrt{3}$ ．

(4)利用正弦定理，得

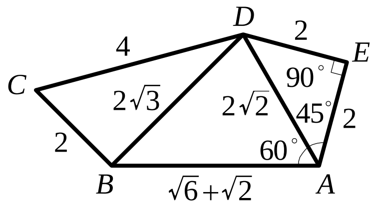
$$\frac{2\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}=\frac{2\sqrt{2}}{\sin\angle ABD}\Rightarrow 2\sqrt{3}\sin\angle ABD=2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2},$$

解得 $\sin\angle ABD=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，即 $\angle ABD=45^\circ$ ．

(5)在△BCD 中，因為 $4^2=2^2+(2\sqrt{3})^2$ ，

所以△BCD 為直角三角形，其面積為 $\frac{2\times 2\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$ ．

故選(1)(4)．



(　　　)4.已知 $\sin\theta=-\frac{2}{3}$ 且 $\cos\theta>0$，請問下列哪些選項是正確的?　(1)$\tan\theta<0$　(2) $\tan^2\theta>\frac{4}{9}$　(3)$\sin^2\theta>\cos^2\theta$　(4)$\sin 2\theta>0$　(5)標準位置角 θ 與 2θ 的終邊位在不同的象限．

【100 學測】

解答　12

解析　$\sin\theta=-\frac{2}{3}$，且 $\cos\theta>0$，$\therefore\theta$ 在第四象限

(1)○：$\because\theta$ 在第四象限，$\therefore\tan\theta<0$

(2)○：$\tan\theta=-\frac{2}{\sqrt{5}}$，$\tan^2\theta=\frac{4}{5}>\frac{4}{9}$

(3)╳：$\sin^2\theta=\frac{4}{9}$，$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=\frac{5}{9}$，$\therefore\sin^2\theta<\cos^2\theta$

(4)╳：$\sin\theta=-\frac{2}{3}$，$\cos\theta=\frac{\sqrt{5}}{3}$，$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2(-\frac{2}{3})(\frac{\sqrt{5}}{3})=-\frac{4\sqrt{5}}{9}<0$

(5)╳：$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=2(\frac{5}{9})-1=\frac{1}{9}>0$，

$\because\sin 2\theta<0$，$\cos 2\theta>0$，$\therefore 2\theta$ 在第四象限，

又 θ 也在第四象限，$\therefore\theta$ 與 2θ 的終邊位於相同的象限

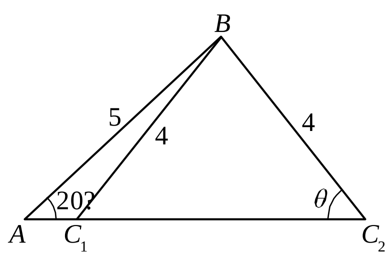
故選(1)(2)．

(　　　)5.在△ABC 中，已知 $\angle A=20^\circ$，$\overline{AB}=5$，$\overline{BC}=4$．請選出正確的選項．　(1)可以確定 $\angle B$ 的餘弦值　(2)可以確定 $\angle C$ 的正弦值　(3)可以確定△ABC 的面積　(4)可以確定△ABC 的內切圓半徑　(5)可以確定△ABC 的外接圓半徑．

【105 學測】

解答　25

解析　滿足條件的三角形共有△ABC_1 與△ABC_2 兩個三角形，如下圖：



設 $\angle AC_2B=\theta$，則 $\angle ABC_2=160^\circ-\theta$，$\angle AC_1B=180^\circ-\theta$，$\angle ABC_1=\theta-20^\circ$．

(1)因為 $\cos(160^\circ-\theta)$不恆等於 $\cos(\theta-20^\circ)$，所以 $\cos B$ 的值不確定．

(2)因為 $\sin(180^\circ-\theta)=\sin\theta$，即 $\sin\angle AC_1B=\sin\angle AC_2B$，所以 $\sin C$ 的值確定．

(3)由圖知，$\triangle ABC_1$ 的面積小於 $\triangle ABC_2$ 的面積．

(4)由圖知，$\triangle ABC_1$ 的內切圓半徑小於 $\triangle ABC_2$ 的內切圓半徑．

(5)根據正弦定理，兩個三角形的外接圓半徑均為 $\dfrac{4}{2\sin 20^\circ}$ ．

故選(2)(5)．

(　　)6.試問下列哪些選項中的數是有理數? (1)3.1416 (2)$\sqrt{3}$ (3)$\log_{10}\sqrt{5}+\log_{10}\sqrt{2}$ (4)$\dfrac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ}+\dfrac{\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ}$ (5)方程式 $x^3-2x^2+x-1=0$ 的唯一實根．

【98 學測】

解答 134

解析 (1)○：$3.1416=\dfrac{31416}{10000}$

(2)╳：$\sqrt{3}$ 為無理數

(3)○：$\log_{10}\sqrt{5}+\log_{10}\sqrt{2}=\log_{10}\sqrt{10}=\dfrac{1}{2}\log_{10}10=\dfrac{1}{2}$

(4)○：$\dfrac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ}+\dfrac{\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ}=\dfrac{\sin^2 15^\circ+\cos^2 15^\circ}{\cos 15^\circ\cdot\sin 15^\circ}=\dfrac{2}{2\sin 15^\circ\cdot\cos 15^\circ}=\dfrac{2}{\sin 30^\circ}=4$

(5)╳：由牛頓定理知 $x^3-2x^2+x-1=0$ 的有理根僅有 ± 1，將 $x=\pm 1$ 代入均不合

故唯一實根必為無理數

故選(1)(3)(4)．

(　　)7.設 θ_1，θ_2，θ_3，θ_4 分別為第一、第二、第三、第四象限角，且都介於 0 與 2π 之間．已知$|\cos\theta_1|=|\cos\theta_2|=|\cos\theta_3|=|\cos\theta_4|=\dfrac{1}{3}$，請問下列哪些選項是正確的? (1)$\theta_1<\dfrac{\pi}{4}$ (2)$\theta_1+\theta_2=\pi$ (3)$\cos\theta_3=-\dfrac{1}{3}$ (4)$\sin\theta_4=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ (5)$\theta_4=\theta_3+\dfrac{\pi}{2}$ ．

【99 學測】

解答 23

解析 $|\cos\theta_1|=|\cos\theta_2|=|\cos\theta_3|=|\cos\theta_4|=\dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow \cos\theta_1=\dfrac{1}{3}$， $\cos\theta_2=-\dfrac{1}{3}$， $\cos\theta_3=-\dfrac{1}{3}$， $\cos\theta_4=\dfrac{1}{3}$，

(1)╳：$\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}>\dfrac{1}{3}=\cos\theta_1$， $\therefore \theta_1>\dfrac{\pi}{4}$

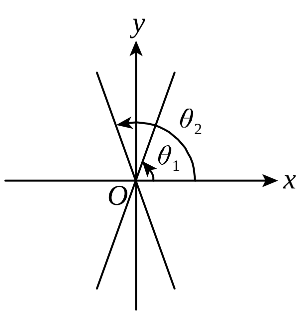
(2)○：$\theta_2=\pi-\theta_1 \Rightarrow \theta_1+\theta_2=\pi$

(3)○：$\cos\theta_3=-\dfrac{1}{3}$

(4)╳：$\cos\theta_4=\dfrac{1}{3}\Rightarrow \sin\theta_4=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

(5)╳：$\theta_3=\pi+\theta_1$，$\theta_4=2\pi-\theta_1$， $\therefore \theta_4\neq\theta_3+\dfrac{\pi}{2}$

故選(2)(3)．



(　　) 8.在△ABC 中，已知 $50° \le \angle A < \angle B \le 60°$．試選出正確的選項． (1)$\sin A < \sin B$　(2)$\sin B < \sin C$　(3)$\cos A < \cos B$　(4)$\sin C < \cos C$　(5) $\overline{AB} < \overline{BC}$ ．

【108 學測】

解答　12

解析　因為 $50° \le \angle A < \angle B \le 60°$，所以 $60° < \angle C < 80°$．

因此，$50° \le \angle A < \angle B < \angle C < 90°$．

(1)因為 $0° < \angle A < \angle B < 90°$，所以 $\sin A < \sin B$．

(2)因為 $0° < \angle B < \angle C < 90°$，所以 $\sin B < \sin C$．

(3)因為 $0° < \angle A < \angle B < 90°$，所以 $\cos A > \cos B$．

(4)因為 $45° < \angle C < 90°$，所以 $\sin C > \cos C$．

(5)因為 $\angle C > \angle A$，所以 $\overline{AB} > \overline{BC}$ ．

故選(1)(2)．

(　　) 9.若 $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$，試問以下哪些選項恆成立? (1)$\sin\theta < \cos\theta$　(2)$\tan\theta < \sin\theta$　(3)$\cos\theta < \tan\theta$　(4)$\sin 2\theta < \cos 2\theta$　(5) $\tan\frac{\theta}{2} < \frac{1}{2}\tan\theta$ ．

【學測】

解答　15

解析　(1)○：$\cos\theta > \sin\theta$

(2)╳：$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} > \frac{\sin\theta}{1}$

(3)╳：不一定

(4)╳：$\because 0 < 2\theta < \frac{\pi}{2}$，$\therefore$不一定

(5)○：$\tan\theta = \tan(2\cdot\frac{\theta}{2}) = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$，

去分母 $\Rightarrow \tan\theta - \tan\theta\cdot\tan^2\frac{\theta}{2} = 2\tan\frac{\theta}{2}$

$\Rightarrow \tan\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}\tan\theta - \frac{1}{2}\tan\theta\cdot\tan^2\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}\tan\theta(1-\tan^2\frac{\theta}{2}) < \frac{1}{2}\tan\theta$（$\because 0 < \tan\frac{\theta}{2} < 1$，$\therefore \tan^2\frac{\theta}{2} < 1$）

故選(1)(5)．

三、填充題 (21 題　每題 21 分　共 441 分)

1.坐標平面上，以原點 O 為圓心的圓上有三個相異點 $A(1,0)$，B，C，且 $\overline{AB} = \overline{BC}$ ．已知銳角三角形 OAB 的面積為 $\frac{3}{10}$，則△OAC 的面積為 ＿＿＿＿＿＿＿＿．(化為最簡分數)

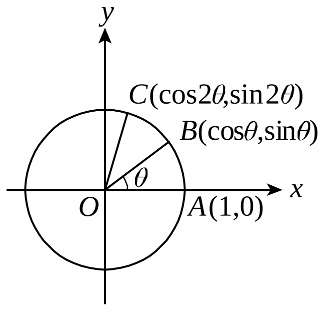
【學測】

解答　$\frac{12}{25}$

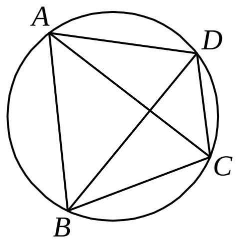
解析　令 $B(\cos\theta,\sin\theta)$，$0° < \theta < 90°$，$C(\cos 2\theta,\sin 2\theta)$，

△OAB 面積 $= \frac{1}{2}\times 1\times 1\times\sin\theta = \frac{3}{10}$，$\therefore \sin\theta = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos\theta = \frac{4}{5}$，

故△OAC 面積 $= \frac{1}{2}\times 1\times 1\times\sin 2\theta = \frac{1}{2}(2\sin\theta\cdot\cos\theta) = \frac{3}{5}\times\frac{4}{5} = \frac{12}{25}$ ．



2.如圖所示，$ABCD$ 為圓內接四邊形．若 $\angle DBC = 30°$，$\angle ABD = 45°$，$\overline{CD} = 6$，則線段 $\overline{AD} =$____________．



【學測】

解答 $\sqrt{72}$

解析 $\triangle BCD$ 中 $\dfrac{\overline{CD}}{\sin 30°} = 2R \Rightarrow 2R = \dfrac{6}{\frac{1}{2}} = 12$，

$\triangle ABD$ 中 $\dfrac{\overline{AD}}{\sin 45°} = 2R$，$\therefore \overline{AD} = 2R \times \sin 45° = 12 \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2} = \sqrt{72}$．

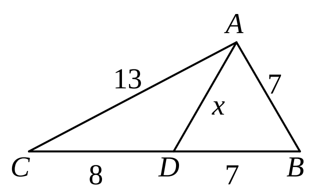
3.在$\triangle ABC$ 中，若 D 點在 $\overline{BC}$ 邊上，且 $\overline{AB} = 7$，$\overline{AC} = 13$，$\overline{BD} = 7$，$\overline{CD} = 8$，則 $\overline{AD} =$____________．

【學測】

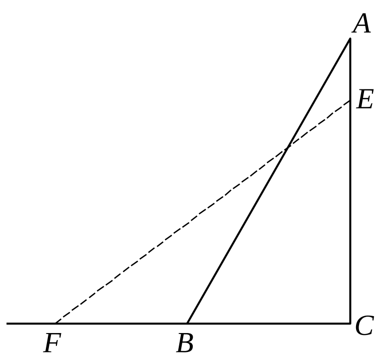
解答 7

解析 $\triangle ABC$ 中 $\cos B = \dfrac{7^2 + 15^2 - 13^2}{2 \times 7 \times 15}$，$\triangle ABD$ 中 $\cos B = \dfrac{7^2 + 7^2 - x^2}{2 \times 7 \times 7}$

$\Rightarrow \dfrac{49 + 225 - 169}{2 \times 7 \times 15} = \dfrac{49 + 49 - x^2}{2 \times 7 \times 7} \Rightarrow \dfrac{105}{15} = \dfrac{98 - x^2}{7} \Rightarrow x^2 = 49 \Rightarrow x = \pm 7$（負不合）．



4.如圖所示（只是示意圖），將梯子 $\overline{AB}$ 靠在與地面垂直的牆 AC 上，測得與水平地面的夾角 $\angle ABC$ 為 $60°$．將在地面上的底 B 沿著地面向外拉 51 公分到點 F（即 $\overline{FB} = 51$公分），此時梯子 $\overline{EF}$ 與地面的夾角 $\angle EFC$ 之正弦值為 $\sin\angle EFC = 0.6$，則梯子長 $\overline{AB} =$____________公分．



【107 學測】

解答 170

解析 設 $\overline{AB} = \overline{EF} = x$．因為 $\angle ABC = 60°$，所以 $\overline{BC} = \dfrac{x}{2}$．

又因為 $\sin\angle EFC = \dfrac{3}{5}$，所以 $\cos\angle EFC = \dfrac{51 + \frac{x}{2}}{x} = \dfrac{4}{5} \Rightarrow 255 + \dfrac{5}{2}x = 4x$．

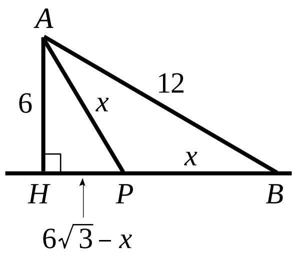
解得 $x = 170$．故 $\overline{AB} = 170$．

5.小鎮 A 距離一筆直道路 6 公里，並與道路上的小鎮 B 相距 12 公里．今欲在此道路上蓋一家超級市場使其與 A、B 等距，則此超級市場與 A 的距離須為____________公里．（化為最簡根式）

【103 學測】

解答 $4\sqrt{3}$

解析 設超級市場蓋在 P 點，且 $\overline{PA}=\overline{PB}=x$， 如下圖所示．



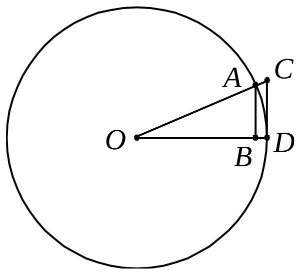
利用畢氏定理，得 $\overline{HB}=\sqrt{12^2-6^2}=6\sqrt{3}$， 則 $\overline{HP}=6\sqrt{3}-x$ ．

再利用畢氏定理，得

$x^2=6^2+(6\sqrt{3}-x)^2 \Rightarrow x^2=36+108-12\sqrt{3}x+x^2$ ，

解得 $x=\dfrac{144}{12\sqrt{3}}=\dfrac{12}{\sqrt{3}}=4\sqrt{3}$ ，即超市與 A 的距離為 $4\sqrt{3}$ 公里．

6.設圓 O 之半徑為 24， $\overline{OC}=26$ ， $\overline{OC}$ 交圓 O 於 A 點， $\overline{CD}$ 切圓 O 於 D 點，B 為 A 點到 $\overline{OD}$ 的垂足，如下圖，則 $\overline{AB}=$____________．（化為最簡分數）



【103 學測】

解答 $\dfrac{120}{13}$

解析 由題意 $\cos\angle COD=\dfrac{24}{26}=\dfrac{12}{13}$

$\Rightarrow \overline{AB}=\overline{OA}\sin\angle AOB=24(\dfrac{5}{13})=\dfrac{120}{13}$ ．

7.在△ABC 中， $\overline{AB}=10$ ， $\overline{AC}=9$ ， $\cos\angle BAC=\dfrac{3}{8}$ ．設點 P，Q 分別在邊 $\overline{AB}$ ， $\overline{AC}$ 上使得△APQ 之面積為△ABC 面積之一半，則 $\overline{PQ}$ 之最小可能值為____________．（化成最簡分數）

【98 學測】

解答 $\dfrac{15}{2}$

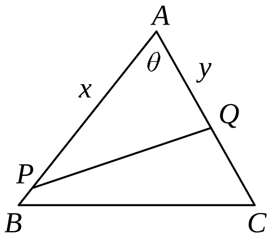
解析 設 $\overline{AP}=x$ ， $\overline{AQ}=y$ ， $\angle BAC=\theta$,

$$\frac{\triangle APQ}{\triangle ABC}=\frac{\frac{1}{2}xy\sin\theta}{\frac{1}{2}10\cdot 9\sin\theta}=\frac{1}{2}\Rightarrow xy=45 ,$$

△APQ 中， $\overline{PQ}^2=x^2+y^2-2xy\cos\theta=x^2+y^2-2xy\cdot\dfrac{3}{8}$

$$\geq 2xy-\frac{3}{4}xy=\frac{5}{4}xy=\frac{5}{4}\times 45=\frac{225}{4} ,$$

則 $\overline{PQ}\geq\dfrac{15}{2}$ ，故 $\overline{PQ}$ 的最小值為 $\dfrac{15}{2}$ ．



8.四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}=1$，$\overline{BC}=5$，$\overline{CD}=5$，$\overline{DA}=7$，且 $\angle DAB=\angle BCD=90°$，則對角線 $\overline{AC}$ 長為____________．

【100 學測】

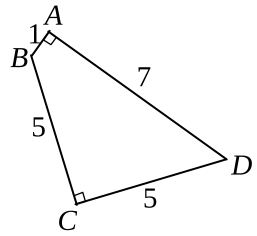
解答　$\sqrt{32}$

解析　∵四邊形 $ABCD$ 中，$\angle DAB=\angle BCD=90°$，

∴$\angle ABC+\angle ADC=180°$，即 $\angle ABC=180°-\angle ADC$，

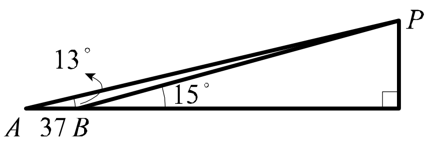
利用 $\cos\angle ABC=\cos(180°-\angle ADC)\Rightarrow\cos\angle ABC=-\cos\angle ADC$，

則 $\dfrac{25+1-\overline{AC}^2}{2\times5\times1}=-\dfrac{25+49-\overline{AC}^2}{2\times5\times7}\Rightarrow\overline{AC}=\sqrt{32}$ ．



9.如圖，老王在平地點 A 測得遠方山頂點 P 的仰角為 13°．老王朝著山的方向前進 37 公丈後來到點 B，再測得山頂點 P 的仰角為 15°．則山高約為____________公丈．

（四捨五入至個位數，$\tan13°\approx0.231$，$\tan15°\approx0.268$）



【104 學測】

解答　62

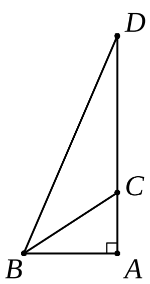
解析　設 B 到山腳為 x 公丈，山高為 h 公丈，則

$$\begin{cases}\tan13°=\dfrac{h}{37+x}\approx0.231\\ \tan15°=\dfrac{h}{x}\approx0.268\end{cases},$$

$$\Rightarrow h\approx(37+\frac{h}{0.268})\times0.231\Rightarrow h\approx37\times0.231+\frac{0.231}{0.268}h\Rightarrow h(1-\frac{0.231}{0.268})\approx37\times0.231$$

$$\Rightarrow h\approx37\times0.231\times\frac{0.268}{0.037}\approx61.908\approx62$$ ．

10.如下圖，直角三角形 ABD 中，$\angle A$ 為直角，C 為 $\overline{AD}$ 邊上的點．已知 $\overline{BC}=6$，$\overline{AB}=5$，$\angle ABD=2\angle ABC$，則 $\overline{BD}=$____________．(化成最簡分數)

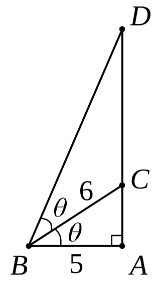


【99 學測】

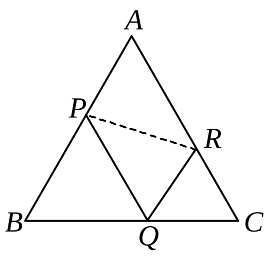
解答　$\dfrac{90}{7}$

解析 △ABC 中，$\cos\theta=\frac{5}{6}$，則 $\cos2\theta=2\cos^2\theta-1=2(\frac{5}{6})^2-1=\frac{7}{18}$，

△ABD 中，$\cos2\theta=\frac{5}{\overline{BD}}$，$\therefore\overline{BD}=\frac{5}{\cos2\theta}=\frac{5}{\frac{7}{18}}=\frac{90}{7}$.



11.在邊長為 13 的正三角形 ABC 上各邊分別取一點 P、Q、R，使得 $APQR$ 形成一平行四邊形，如下圖所示：



若平行四邊形 $APQR$ 的面積為 $20\sqrt{3}$，則線段 PR 的長度為__________ .

【101 學測】

解答 7

解析 $\because$ $APQR$ 為平行四邊形，$\therefore$ $\angle PAR=\angle BPQ=\angle QRC=60°$

$\Rightarrow$ △PBQ、△RQC 為正三角形

令 $\overline{AP}=x$，$\overline{BP}=\overline{AR}=13-x$

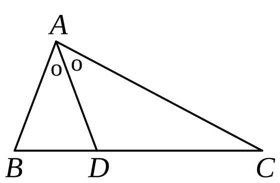
$\Delta APR=\frac{1}{2}$ 平行四邊形 $APQR$ 面積

$\Rightarrow$ $\frac{1}{2}(x)(13-x)\cdot\sin60°=\frac{1}{2}(20\sqrt{3})$

$\Rightarrow$ $x^2-13x+40=0$ $\Rightarrow$ $(x-8)(x-5)=0$ $\Rightarrow$ $x=8$ 或 5

$\therefore$ $\overline{PR}=\sqrt{8^2+5^2-2\cdot8\cdot5\cdot\cos60°}=\sqrt{49}=7$

12.如下圖所示，在△ABC 中，$\angle BAC$ 的平分線 AD 交對邊 $\overline{BC}$ 於 D；已知 $\overline{BD}=3$，$\overline{DC}=6$，且 $\overline{AB}=\overline{AD}$，則 $\cos\angle BAD$ 之值為__________ .（化成最簡分數）



【學測】

解答 $\frac{3}{4}$

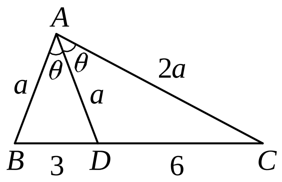
解析 設 $\overline{AB}=a$，則 $\overline{AB}=\overline{AD}=a$，$\overline{AC}=2a$，$\angle BAD=\angle DAC=\theta$,

△ABD 中，$\cos\theta=\frac{a^2+a^2-3^2}{2\cdot a\cdot a}$……①

△ACD 中，$\cos\theta=\frac{a^2+(2a)^2-6^2}{2\cdot a\cdot2a}$……②

由①②得 $\frac{2a^2-9}{2a^2}=\frac{5a^2-36}{4a^2}\Rightarrow a^2=18$，

故 $\cos\theta=\dfrac{2a^2-9}{2a^2}=\dfrac{2\times 18-9}{2\times 18}=\dfrac{27}{36}=\dfrac{3}{4}$ ．



13.設 $\cos\theta+3\sin\theta=2$，且 $0°<\theta<90°$，求 $\cos\theta+\sin\theta=$____________．

【學測】

解答 $\dfrac{4+\sqrt{6}}{5}$

解析 $\cos\theta+3\sin\theta=2 \Rightarrow 3\sin\theta=2-\cos\theta \Rightarrow (3\sin\theta)^2=(2-\cos\theta)^2$

$\Rightarrow 9\sin^2\theta=4-4\cos\theta+\cos^2\theta$

$\Rightarrow 9(1-\cos^2\theta)=4-4\cos\theta+\cos^2\theta$

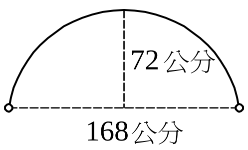
$\Rightarrow 10\cos^2\theta-4\cos\theta-5=0$

$\Rightarrow \cos\theta=\dfrac{4\pm\sqrt{16+200}}{20}=\dfrac{4\pm\sqrt{216}}{20}=\dfrac{4\pm 6\sqrt{6}}{20}=\dfrac{2\pm 3\sqrt{6}}{10}$（取正）

$3\sin\theta=2-\cos\theta=2-\dfrac{2+3\sqrt{6}}{10}=\dfrac{18-3\sqrt{6}}{10}$

$\therefore \sin\theta=\dfrac{6-\sqrt{6}}{10}$，故 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{4+\sqrt{6}}{5}$ ．

14.工匠在窗子外邊想做一個圓弧型的花臺，此花臺在窗口的中央往外伸出 72 公分，窗的口寬度是 168 公分，則此圓弧的圓半徑為____________公分．

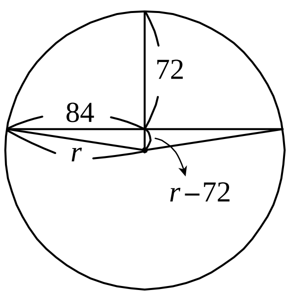


【學測】

解答 85

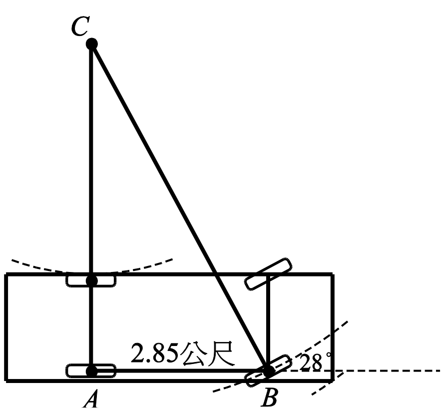
解析 設圓半徑為 r，則 $r^2=84^2+(r-72)^2$

$\Rightarrow r^2=84^2+r^2-144r+82^2 \Rightarrow 144r=7056+5184=12240 \Rightarrow r=85$ ．



15.下圖為汽車迴轉示意圖．汽車迴轉時，將方向盤轉動到極限，以低速讓汽車進行轉向圓周運動，汽車轉向時所形成的圓周的半徑就是迴轉半徑，如圖中的 $\overline{BC}$ 即是．已知在低速前進時，圖中 A 處的輪胎行進方向與 $\overline{AC}$ 垂直，B 處的輪胎行進方向與 $\overline{BC}$ 垂直．在圖中，已知軸距 $\overline{AB}$ 為 2.85 公尺，方向盤轉到極限時，輪子方向偏了 28 度，試問此車的迴轉半徑 $\overline{BC}$ 為____________公尺．

（小數點後第一位以下四捨五入，$\sin 28°\approx 0.4695$，$\cos 28°\approx 0.8829$）



【104 學測】

解答 6.1

解析 依題意，得 $\cos 62^\circ = \dfrac{2.85}{\overline{BC}}$，即

$$\overline{BC} = \frac{2.85}{\cos 62^\circ} = \frac{2.85}{\sin 28^\circ} \approx \frac{2.85}{0.4695} \approx 6.1 \ .$$

16.已知△ABC 中，$\overline{AB} = 2$，$\overline{BC} = 3$ 且 $\angle A = 2\angle C$，則 $\overline{AC} =$____________.（化成最簡分數）

【99 學測】

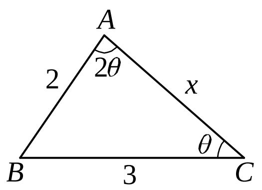
解答 $\dfrac{5}{2}$

解析 由正弦定理知 $\dfrac{2}{\sin\theta} = \dfrac{3}{\sin 2\theta} = \dfrac{3}{2\sin\theta\cdot\cos\theta}$，

$\because \sin\theta \neq 0$，$\therefore \cos\theta = \dfrac{3}{4}$，

由餘弦定理知 $\cos\theta = \dfrac{9 + x^2 - 4}{2\cdot 3\cdot x} = \dfrac{3}{4}$

$\Rightarrow 2x^2 - 9x + 10 = 0 \Rightarrow (2x-5)(x-2) = 0 \Rightarrow x = \dfrac{5}{2}$ 或 $x = 2$（不合）.



17.在△ABC 中，M 為 $\overline{BC}$ 邊之中點，若 $\overline{AB} = 3$，$\overline{AC} = 5$，且 $\angle BAC = 120^\circ$，則 $\tan\angle BAM =$____________.（化成最簡根式）

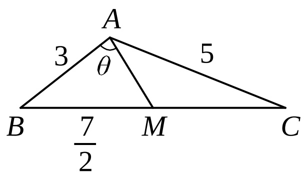
【學測】

解答 $5\sqrt{3}$

解析 △ABC 中，$\overline{BC}^2 = 3^2 + 5^2 - 2\times 3\times 5\times\cos 120^\circ = 49$，$\therefore \overline{BC} = 7$，

利用中線定理，$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2) \Rightarrow 9 + 25 = 2(\overline{AM}^2 + \dfrac{49}{4}) \Rightarrow \overline{AM} = \dfrac{\sqrt{19}}{2}$，

△ABM 中，$\cos\theta = \dfrac{3^2 + (\frac{\sqrt{19}}{2})^2 - (\frac{7}{2})^2}{2\times 3\times\frac{\sqrt{19}}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{19}}$，$\therefore \tan\theta = \dfrac{5\sqrt{3}}{1} = 5\sqrt{3}$.



18.某人隔河測一山高，在 A 點觀測山時，山的方位為東偏北 60°，山頂的仰角為 45°，某人自 A 點向東行 600 公尺到達 B 點，山的方位變成在西偏北 60°，則山有____________公尺．

【學測】

解答 600

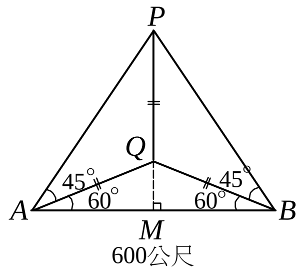
解析 如圖，設山高為 $\overline{PQ}$，M 為 $\overline{AB}$ 中點，

依題意，$\overline{AM} = \overline{BM} = 300$，

在△AMQ 中，$\overline{AM} = 300$，$\overline{AQ} = 600$，

在△APQ 中，$\overline{AQ} = \overline{PQ} = 600$，

故山高 600 公尺．



19.設銳角三角形 ABC 的外接圓半徑為 8．已知外接圓圓心到 $\overline{AB}$ 的距離為 2，而到 $\overline{BC}$ 的距離為 7，則 $\overline{AC}=$__________．(化成最簡根式)

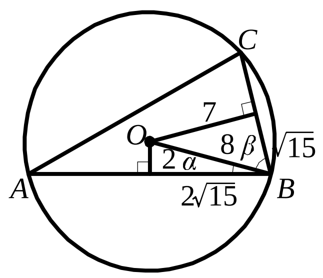
【102 學測】

解答 $4\sqrt{15}$

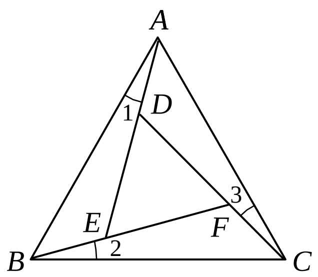
解析 依題意，得下圖．利用和角公式，得

$$\sin B=\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{2}{8}\times\frac{\sqrt{15}}{8}+\frac{2\sqrt{15}}{8}\times\frac{7}{8}=\frac{\sqrt{15}}{4}.$$

再利用正弦定理 $\dfrac{\overline{AC}}{\sin B}=2R$，得 $\overline{AC}=2R\times\sin B=16\times\dfrac{\sqrt{15}}{4}=4\sqrt{15}$．



20.如圖，正△ABC 的邊長為 1，並且 $\angle 1=\angle 2=\angle 3=15°$．已知 $\sin 15°=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，則正△$DEF$ 的邊長為__________．(化為最簡根式)



【103 學測】

解答 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

解析 在△ABE 中，$\angle ABE=60°-15°=45°$，$\angle AEB=180°-15°-45°=120°$，

利用正弦定理，得 $\dfrac{\overline{BE}}{\sin 15°}=\dfrac{\overline{AE}}{\sin 45°}=\dfrac{1}{\sin 120°}$，

即 $\overline{BE}=\dfrac{\sin 15°}{\sin 120°}=\dfrac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$，$\overline{AE}=\dfrac{\sin 45°}{\sin 120°}=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$．

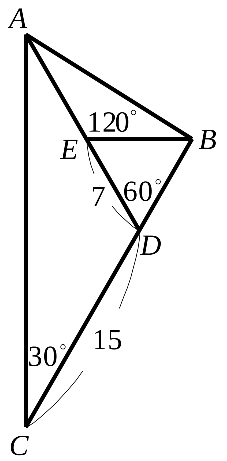
又因為△ABE 與△CAD 全等，所以 $\overline{AD}=\overline{BE}$．

故正△DEF 的邊長為 $\overline{DE}=\overline{AE}-\overline{AD}=\overline{AE}-\overline{BE}$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}$$

$$=\frac{3\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{6}=\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

21.如圖(此為示意圖)，在△ABC 中，$\overline{AD}$ 交 $\overline{BC}$ 於 D 點，$\overline{BE}$ 交 $\overline{AD}$ 於 E 點，且 $\angle ACB=30°$，$\angle EDB=60°$，$\angle AEB=120°$．若 $\overline{CD}=15$，$\overline{ED}=7$，則 $\overline{AB}=$__________．



【108 學測】

解答 13

解析 依題意，可推得$\triangle BDE$ 為正三角形，$\triangle ACD$ 為等腰三角形．

因此，$\overline{BE}=7$， $\overline{AE}=15-7=8$ ．

在$\triangle ABE$ 中，利用餘弦定理，得

$\overline{AB}^2=8^2+7^2-2\times 8\times 7\times\cos 120^\circ=64+49+56=169$ ．

故$\overline{AB}=13$ ．