0927~0929 高毅甲　數學第一章　　座號：　　　姓名：

一、 單一選擇題：每格 2 分，共 30 分

1.答案：（B）

解析：由餘弦定理知

$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2-2\overline{AC}\times\overline{BC}\times\cos60^\circ$

$=4+9-2\times2\times3\times\frac{1}{2}=7$

$\therefore\overline{AB}=\sqrt{7}$，故選（B）

2.答案：（E）

解析：令 $a=\sin73^\circ$

$b=\sin146^\circ=\sin(180^\circ-34^\circ)=\sin34^\circ$

$c=\sin219^\circ=\sin(180^\circ+39^\circ)=-\sin39^\circ$

$d=\sin292^\circ=\sin(360^\circ-68^\circ)=-\sin68^\circ$

$e=\sin365^\circ=\sin(360^\circ+5^\circ)=\sin5^\circ$

$\therefore d<c<e<b<a$，故中位數為 e

故選（E）

3.答案：（A）

解析：$\sin100^\circ=\sin(90^\circ-(-10^\circ))=\cos(-10^\circ)$，

故選（A）

4.答案：（C）

解析：$8x^2-4\sqrt{3}x+1=0$

$\Rightarrow x=\frac{4\sqrt{3}\pm\sqrt{48-32}}{16}=\frac{\sqrt{3}\pm1}{4}$

$\because\sin A$，$\sin B$ 為 $8x^2-4\sqrt{3}x+1=0$ 之兩根，且 $\sin A<\sin B$

$\therefore\sin A=\frac{\sqrt{3}-1}{4}$

由正弦定理知 $\frac{a}{\sin A}=2R$

$\Rightarrow\frac{1}{\frac{\sqrt{3}-1}{4}}=2R\Rightarrow R=\sqrt{3}+1$

故選（C）

5.答案：（D）

解析：$b=\cos61^\circ=\sin29^\circ<\sin61^\circ<\tan61^\circ$

因此 $b<a<c$

故選（D）

6.答案：（B）

解析：$\cos135^\circ\sin225^\circ-\sin480^\circ\cos150^\circ+\tan(-300^\circ)\cos210^\circ=(-\cos45^\circ)(-\sin45^\circ)-(\sin60^\circ)(-\cos30^\circ)+(\tan60^\circ)(-\cos30^\circ)$

$=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\sqrt{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-\frac{3}{2}=-\frac{1}{4}$

故選（B）

7.答案：（B）

解析：$a=\sin870^\circ=\sin(720^\circ+150^\circ)=\sin150^\circ=\sin30^\circ$

$b=\sin(-430^\circ)=-\sin430^\circ=-\sin(360^\circ+70^\circ)=-\sin70^\circ<0$

$c=\cos(-430^\circ)=\cos430^\circ=\cos(360^\circ+70^\circ)=\cos70^\circ=\sin20^\circ$

1 弧度 $\approx57.3^\circ$，$d=\tan1>\tan45^\circ=1$

$\because\tan1>1>\sin30^\circ>\sin20^\circ>0>-\sin70^\circ$

$\therefore d>a>c>b$

故選（B）

8.答案：（B）

解析：如圖所示，可知底邊為 $2\cos20^\circ$

故選（B）

9.答案：（C）

解析：$180^\circ<\alpha<270^\circ\Rightarrow90^\circ<\frac{\alpha}{2}<135^\circ\Rightarrow\cos\frac{\alpha}{2}<0$，$\sin\frac{\alpha}{2}>0$

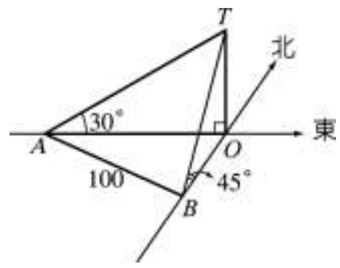
$\sqrt{1+\cos\alpha}-\sqrt{1-\cos\alpha}=\sqrt{1+2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1}-\sqrt{1-\left(1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}=\sqrt{2}\left(\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|-\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|\right)$

$=\sqrt{2}\left(-\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)=-\sqrt{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)$

故選（C）

10.答案：（E）

解析：



設塔為 $\overline{OT}$，塔高為 h 公尺

則 $\overline{OA}=\frac{h}{\tan30^\circ}=\sqrt{3}h$，$\overline{OB}=\frac{h}{\tan45^\circ}=h$

又 $\angle AOB=90^\circ$

$\therefore\overline{AB}^2=\overline{OA}^2+\overline{OB}^2$

$\Rightarrow100^2=(\sqrt{3}h)^2+h^2=4h^2$

$\Rightarrow h=\frac{100}{2}=50$（公尺）

故選（E）

11.答案：（C）

解析：$\overline{AB}=\overline{AD}+\overline{BD}=\sqrt{3}\,\overline{CD}+\frac{1}{\sqrt{3}}\overline{CD}=\frac{4}{\sqrt{3}}\overline{CD}$

$\Rightarrow\overline{CD}=\frac{\sqrt{3}}{4}\overline{AB}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times50=\frac{25\sqrt{3}}{2}$，故選（C）

12.答案：（C）

解析：$\cos105^\circ=\cos(60^\circ+45^\circ)=\cos60^\circ\cos45^\circ-\sin60^\circ\sin45^\circ=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

故選（C）

13.答案：（C）

解析：θ 是第三象限角 $\Rightarrow180^\circ+360^\circ n<\theta<270^\circ+360^\circ n$（$n\in Z$）

$\Rightarrow90^\circ+180^\circ n<\frac{\theta}{2}<135^\circ+180^\circ n\Rightarrow\frac{\theta}{2}$ 為第二或第四象限角

$360^\circ+720^\circ n<2\theta<540^\circ+720^\circ n\Rightarrow 720^\circ n<2\theta<180^\circ+720^\circ n\Rightarrow 2\theta$ 為第一或二象限角

（A）╳：當 $\frac{\theta}{2}$ 為第四象限角，$\sin\frac{\theta}{2}<0$

（B）╳：當 $\frac{\theta}{2}$ 為第四象限角，$\cos\frac{\theta}{2}>0$

（C）○：不管 $\frac{\theta}{2}$ 為第二或第四象限角，$\tan\frac{\theta}{2}<0$ 均成立

（D）╳：當 2θ 為第一象限角，$\cos 2\theta>0$

（E）╳：當 2θ 為第一象限角，$\tan 2\theta>0$

故選（C）

14.答案：（A）

解析：$\sin^2\left(22.5^\circ+\frac{\theta}{2}\right)-\sin^2\left(22.5^\circ-\frac{\theta}{2}\right)$

$=\sin\left[\left(22.5^\circ+\frac{\theta}{2}\right)+\left(22.5^\circ-\frac{\theta}{2}\right)\right]\sin\left[\left(22.5^\circ+\frac{\theta}{2}\right)-\left(22.5^\circ-\frac{\theta}{2}\right)\right]$

$=\sin 45^\circ\cdot\sin\theta=\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}}$

故選（A）

15.答案：（B）

解析：$4+x$，$5+x$，$7+x$ 為鈍角三角形之三邊長

∵$7+x$ 為最長　∴$7+x$ 所對之角為鈍角

（1）∵$4+x$，$5+x$，$7+x$ 為三角形之三邊長且 $7+x$ 為最長邊

$\therefore (4+x)+(5+x)>7+x$

$\Rightarrow x>-2$

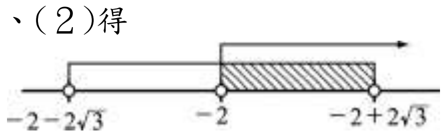
（2）∵$7+x$ 所對之角為鈍角

$\therefore (4+x)^2+(5+x)^2<(7+x)^2$

$\Rightarrow x^2+4x-8<0$

$\Rightarrow -2-2\sqrt{3}<x<-2+2\sqrt{3}$

由（1）、（2）得



$-2<x<-2+2\sqrt{3}$

∴最小整數 $x=-1$

故選（B）

二、 多重選擇題：每格 2 分，共 20 分

1.答案：（D）（E）

解析：（A）╳：$\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \angle A=60^\circ$ 或 120°

（B）╳：$\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$

$\Rightarrow \angle A+\angle B=180^\circ-\angle C$

$\Rightarrow \cos(\angle A+\angle B)=\cos(180^\circ-\angle C)=-\cos C$

（C）╳：$\sin^2 A+\sin^2 B>\sin^2 C$

$\Rightarrow \left(\frac{a}{2R}\right)^2+\left(\frac{b}{2R}\right)^2>\left(\frac{c}{2R}\right)^2$

$\Rightarrow a^2+b^2>c^2$

$\Rightarrow \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}>0$

$\Rightarrow \angle C$ 為銳角，但△ABC 不一定是銳角三角形

（D）○：$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=7:5:3$

令 $a=7k$，$b=5k$，$c=3k$

$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(25+9-49)k^2}{30k^2}=-\frac{15}{30}=-\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \angle A=120^\circ$

$\therefore \sin 2A=\sin 240^\circ=-\sin 60^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

（E）○：$2\sin A\cos B=\sin C$

$\Rightarrow 2\left(\frac{a}{2R}\right)\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right)=\frac{c}{2R}$

$\Rightarrow \frac{a^2+c^2-b^2}{c}=c$

$\Rightarrow a^2+c^2-b^2=c^2$

$\Rightarrow a^2=b^2\Rightarrow a=b$

$\Rightarrow$ △ABC 為等腰三角形

故選（D）（E）

2.答案：（B）（D）

解析：（A）$(\sin\theta-\cos\theta)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2\Rightarrow 1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}\Rightarrow \sin\theta\cos\theta=\frac{3}{8}$

（B）（C）$(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{7}{4}\Rightarrow \sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{7}}{2}$

（D）（E）$\begin{cases}\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{2}\cdots\cdots\cdots\text{①}\\ \sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{7}}{2}\cdots\cdots\cdots\text{②}\end{cases}$

由 $\frac{①+②}{2}$ 得 $\sin\theta=\frac{1+\sqrt{7}}{4}$

由 $\frac{②-①}{2}$ 得 $\cos\theta=\frac{\sqrt{7}-1}{4}$

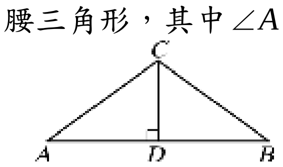
故選（B）（D）

3.答案：（A）（B）（D）（E）

解析：（A）○：$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}<0\Rightarrow \angle C$ 為鈍角 ⇒ △ABC 必為鈍角三角形

（B）○：①若 $\angle A$ 或 $\angle B$ 有一為鈍角，則△ABC 為鈍角三角形

②若 $\angle A$ 與 $\angle B$ 皆為銳角，則△ABC 為等腰三角形，其中 $\angle A=\angle B$



$\overline{AC}=\overline{CB}$

設 D 為 $\overline{AB}$ 之中點，則 $\overline{CD}$ 為 $\overline{AB}$ 上之高

設 $\overline{CA}=\overline{CB}=3t$，則 $\overline{CD}=t$，其中 $t>0$

$\Rightarrow\ \overline{AD}=\overline{BD}=\sqrt{(3t)^2-t^2}=\sqrt{8}\,t\Rightarrow$

$\overline{AB}=2\sqrt{8}\,t=4\sqrt{2}\,t$

$\cos C=\dfrac{(3t)^2+(3t)^2-(4\sqrt{2}t)^2}{2\cdot 3t\cdot 3t}=-\dfrac{14}{18}$

$<0\Rightarrow\angle C$ 為鈍角

由①、②知，$\triangle ABC$ 必為鈍角三角形

（C）╳：設 $a=5k$，$b=6k$，$c=7k$，$k>0$

其中 c 為最長邊 $\Rightarrow\angle C$ 為最大角

$\Rightarrow\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{12}{60}=\dfrac{1}{5}>0\Rightarrow\angle C$ 為銳角

最大角為銳角 $\Rightarrow\triangle ABC$ 必為銳角三角形

（D）○：①若 $\angle C$ 為銳角

$45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}<\sin C<\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sin 60^\circ$

$\Rightarrow 45^\circ<\angle C<60^\circ$

$\Rightarrow 75^\circ<\angle B+\angle C<90^\circ$

$\Rightarrow\angle A$ 為鈍角

$\Rightarrow\triangle ABC$ 為鈍角三角形

②若 $\angle C$ 為鈍角

$\Rightarrow\triangle ABC$ 為鈍角三角形

由①、②知 $\triangle ABC$ 為鈍角三角形

（E）○：三高為 9，12，15 $\Rightarrow$ 三邊長之比為 $\dfrac{1}{9}:\dfrac{1}{12}:\dfrac{1}{15}=20:15:12$

設三邊長為 $20k$，$15k$，$12k$，其中 $k>0$，$20k$ 為最長邊，其所對之角為最大角

$\Rightarrow\cos\theta=\dfrac{(15k)^2+(12k)^2-(20k)^2}{2\cdot 15k\cdot 12k}=-\dfrac{31}{360}<0$

$\Rightarrow$ 最大角為鈍角

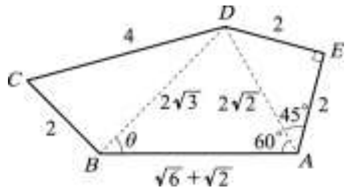
$\Rightarrow\triangle ABC$ 必為鈍角三角形

故選(A)(B)(D)(E)

4.答案：(A)(D)

解析：(A)○：$\triangle AED$ 為等腰直角三角形

$\therefore\overline{AD}=2\sqrt{2}$



（B）╳：$\angle DAB=60^\circ$

（C）╳：$\overline{BD}^2=(2\sqrt{2})^2+(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2-2\cdot 2\sqrt{2}\cdot(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cdot\cos 60^\circ$

$=8+8+2\sqrt{12}-2\sqrt{12}-4$

$=12$

$\therefore\overline{BD}=2\sqrt{3}$

（D）○：由正弦定理 $\dfrac{2\sqrt{2}}{\sin\theta}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}$ $\quad\therefore\sin\theta=\dfrac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore\theta=45^\circ$ 或 135°（不合），即 $\angle ABD=45^\circ$

（E）╳：$\cos C=\dfrac{4^2+2^2-(2\sqrt{3})^2}{2\cdot 4\cdot 2}=\dfrac{8}{16}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\angle C=60^\circ$

$\triangle BCD$ 面積 $=\dfrac{1}{2}\times 4\times 2\times\sin 60^\circ=2\sqrt{3}$

故選(A)(D)

5.答案：(A)(C)

解析：$x:y=2:(-3)$

令 $x=2t$，$y=-3t$，$t\in Z$，$t\neq 0$

(1)若 $t>0$

$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{4t^2+9t^2}=\sqrt{13}\,t$

$\cos\theta=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{2t}{\sqrt{13}t}=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$

(2)若 $t<0$

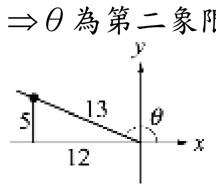
$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{4t^2+9t^2}=\sqrt{13}\,|\,t\,|=-\sqrt{13}\,t$

$\cos\theta=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{2t}{-\sqrt{13}t}=-\dfrac{2}{\sqrt{13}}$

故選(A)(C)

6.答案：(C)(D)(E)

解析：$90^\circ<\theta<180^\circ\Rightarrow\theta$ 為第二象限角



$r=13$，$y=5$，$x=-\sqrt{13^2-5^2}=-12$

$\Rightarrow\sin\theta=\dfrac{5}{13}$，$\cos\theta=-\dfrac{12}{13}$

（A）╳：$\tan\theta=\dfrac{y}{x}=-\dfrac{5}{12}$

（B）╳：$\cos(180^\circ+\theta)=-\cos\theta=\dfrac{12}{13}$

（C）○：$\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta=1-2\left(\dfrac{5}{13}\right)^2=\dfrac{13^2-2\times 5^2}{13^2}=\dfrac{169-50}{169}=\dfrac{119}{169}$

（D）○：$\sin\dfrac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{2}}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\left(-\frac{12}{13}\right)}{2}}=\pm\sqrt{\dfrac{25}{26}}=\pm\dfrac{5\sqrt{26}}{26}$

$\left(\text{取正}\ \because 45^\circ<\dfrac{\theta}{2}<90^\circ\text{，為第一象限角，}\ \sin\dfrac{\theta}{2}>0\right)$

（E）○：$\sin(\theta+30^\circ)=\sin\theta\cos 30^\circ+\cos\theta\sin 30^\circ$

$=\dfrac{5}{13}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\left(-\dfrac{12}{13}\right)\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{5\sqrt{3}-12}{26}$

故選(C)(D)(E)

7.答案：(B)(C)(D)

解析：(A)╳：正五邊形內角 $\angle AOC=180^\circ-\frac{360^\circ}{5}=108^\circ$

因此 $\angle OAC=\frac{180^\circ-108^\circ}{2}=36^\circ$

正六邊形內角 $\angle AOB=180^\circ-\frac{360^\circ}{6}=120^\circ$

因此 $\angle OAB=\frac{180^\circ-120^\circ}{2}=30^\circ$

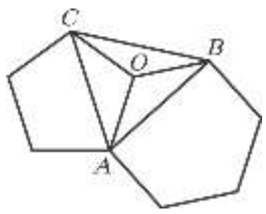
$\because \angle BAC=\angle OAC+\angle OAB=36^\circ+30^\circ=66^\circ$

(B)○：$\because \overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$ $\therefore O$ 是$\triangle ABC$ 的外接圓圓心

(C)○：在$\triangle OAB$ 中，由餘弦定理知 $\overline{AB}^2=\overline{OA}^2+\overline{OB}^2-2\overline{OA}\cdot\overline{OB}\cdot\cos\angle AOB=1^2+1^2-2\times1\times1\times\cos120^\circ=3$

因此 $\overline{AB}=\sqrt{3}$

(D)○：$\because \frac{\overline{BC}}{\sin\angle BAC}=2R \Rightarrow \frac{\overline{BC}}{\sin 66^\circ}=2\times1 \Rightarrow \overline{BC}=2\sin66^\circ$



故選(B)(C)(D)

8.答案：(A)(B)

解析：$\sin\theta=-\frac{2}{3}$，$\cos\theta>0 \Rightarrow \theta$ 為第四象限角 $\Rightarrow \cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

(A)○：$\tan\theta=\frac{-2}{\sqrt{5}}=\frac{-2}{5}\sqrt{5}$

(B)○：$\tan^2\theta=\frac{4}{5}>\frac{4}{9}$

(C)╳：$\sin^2\theta=\frac{4}{9}$，$\cos^2\theta=\frac{5}{9}$

(D)╳：$\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\times\left(\frac{-2}{3}\right)\times\frac{\sqrt{5}}{3}=\frac{-4}{9}\sqrt{5}<0$

(E)╳：$\cos2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=\frac{1}{9}>0$ 且 $\sin2\theta<0 \Rightarrow 2\theta$ 為第四象限角

故選(A)(B)

9.答案：(A)(B)(C)(E)

解析：(A)○：$(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta \Rightarrow a^2=1+2\sin\theta\cos\theta \Rightarrow \sin\theta\cos\theta=\frac{a^2-1}{2}$

(B)○：$(\sin\theta-\cos\theta)^2=1-2\sin\theta\cos\theta=1-(a^2-1)=-a^2+2$

$\Rightarrow \sin\theta-\cos\theta=\pm\sqrt{2-a^2}$

(C)○：$\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)^3-3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)$

$=a^3-\frac{3(a^2-1)}{2}\cdot a=\frac{3a-a^3}{2}$

(D)╳：$\tan\theta+\tan\left(\frac{5\pi}{2}-\theta\right)=\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{2}{a^2-1}$

(E)○：$\sin^4\theta+\cos^4\theta=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta=1-2(\sin\theta\cos\theta)^2$

$=1-2\cdot\left(\frac{a^2-1}{2}\right)^2=1-\frac{a^4-2a^2+1}{2}=\frac{-a^4+2a^2+1}{2}$

故選(A)(B)(C)(E)

10.答案：(B)(C)(E)

解析：(A)╳：$s=\frac{a+b+c}{2}=\frac{7+8+9}{2}=12$

$\triangle ABC=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$=\sqrt{12\cdot5\cdot4\cdot3}=12\sqrt{5}$

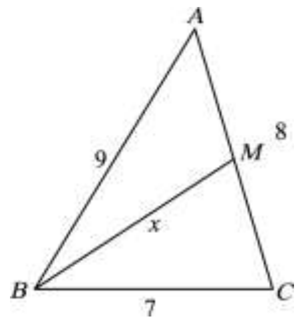
(B)○：$R=\frac{abc}{4\cdot\triangle ABC}=\frac{7\cdot8\cdot9}{4\cdot12\sqrt{5}}=\frac{21\sqrt{5}}{10}$

(C)○：$\triangle ABC=r\cdot s$

$\Rightarrow 12\sqrt{5}=r\cdot12 \Rightarrow r=\sqrt{5}$

(D)╳：$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{8^2+9^2-7^2}{2\cdot8\cdot9}=\frac{2}{3}$

(E)○：設 $\overline{BM}=x$



由餘弦定理可知 $\cos C=\frac{7^2+4^2-x^2}{2\cdot7\cdot4}=\frac{7^2+8^2-9^2}{2\cdot7\cdot8}$

$\Rightarrow 8(49+16-x^2)=4(49+64-81)$

$\Rightarrow x^2=49 \Rightarrow x=7$，故 $\overline{BM}=7$

故選(B)(C)(E)

三、填充題：每格 2 分，共 42 分

1.答案：$\frac{-5\sqrt{13}}{13}$

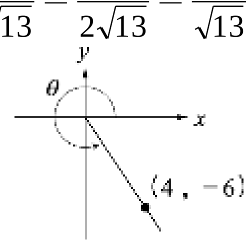
解析：$r=\sqrt{4^2+(-6)^2}=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$

$\Rightarrow \sin\theta=\frac{-6}{2\sqrt{13}}$，$\cos\theta=\frac{4}{2\sqrt{13}}$

$\sin(180^\circ-\theta)+\sin(\theta-90^\circ)=\sin\theta+\sin(-(90^\circ-\theta))$

$=\sin\theta-\sin(90^\circ-\theta)=\sin\theta-\cos\theta$

$=\frac{-6}{2\sqrt{13}}-\frac{4}{2\sqrt{13}}=\frac{-10}{2\sqrt{13}}=\frac{-5}{\sqrt{13}}=\frac{-5\sqrt{13}}{13}$



2.答案：$\frac{7}{5}$

解析：$0^\circ<\theta<90^\circ$，$\cos\theta+3\sin\theta=3\Rightarrow 3\sin\theta=3-\cos\theta$

$\Rightarrow 9\sin^2\theta=(3-\cos\theta)^2=9-6\cos\theta+\cos^2\theta$（兩邊平方）

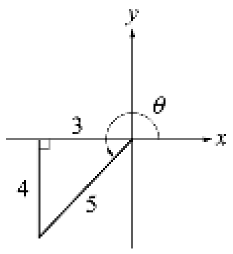
$\Rightarrow 9(1-\cos^2\theta)=9-6\cos\theta+\cos^2\theta$

$\Rightarrow 10\cos^2\theta-6\cos\theta=0\Rightarrow\cos\theta(10\cos\theta-6)=0\Rightarrow\cos\theta=\frac{3}{5}$ 或 0（不合）

$\therefore\cos\theta=\frac{3}{5}$，$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{4}{5}$，則 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{4}{5}+\frac{3}{5}=\frac{7}{5}$

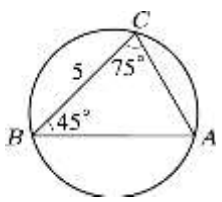
3.答案：$\frac{4}{3}$

解析：如圖，$\cos\theta=-\frac{3}{5}$，$\tan(\theta-180^\circ)=\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}}=\frac{4}{3}$



4.答案：$\frac{5\sqrt{3}}{3}$

解析：



$\angle A=180^\circ-75^\circ-45^\circ=60^\circ$

由正弦定理知 $2R=\frac{\overline{BC}}{\sin A}\Rightarrow R=\frac{5}{2\sin 60^\circ}=\frac{5}{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{5}{\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{3}$

5.答案：(1) $\frac{4\sqrt{2}}{7}$；(2) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

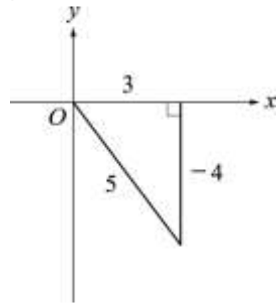
解析：(1) $\cos\theta=\frac{1}{3}$ 且 $270^\circ<\theta<360^\circ\Rightarrow\sin\theta=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$\tan\theta=-2\sqrt{2}$

$\therefore\tan2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{2(-2\sqrt{2})}{1-(-2\sqrt{2})^2}=\frac{-4\sqrt{2}}{-7}=\frac{4\sqrt{2}}{7}$

(2) $\tan\frac{\theta}{2}=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\frac{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}{1+\frac{1}{3}}=\frac{-2\sqrt{2}}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

6.答案：$-\frac{1}{\sqrt{5}}$；$\frac{336}{625}$

解析：$-90^\circ<\theta<0^\circ\Rightarrow\theta$ 為第四象限角　$\therefore\cos\theta=\frac{3}{5}$，則 $\sin\theta=-\frac{4}{5}$



(1) $\sin\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}=\pm\sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}}=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\because -45^\circ<\frac{\theta}{2}<0^\circ\Rightarrow\frac{\theta}{2}$ 為第四象限角　$\therefore\sin\frac{\theta}{2}<0$

$\Rightarrow\sin\frac{\theta}{2}=-\frac{1}{\sqrt{5}}$

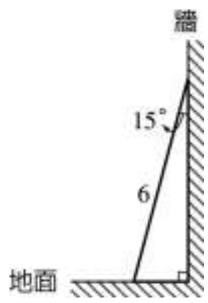
(2) $\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\times\left(\frac{-4}{5}\right)\times\frac{3}{5}=\frac{-24}{25}$

$\cos2\theta=2\cos^2\theta-1=2\left(\frac{3}{5}\right)^2-1=-\frac{7}{25}$

故 $\sin4\theta=\sin(2\cdot2\theta)=2\sin2\theta\cos2\theta=2\left(-\frac{24}{25}\right)\left(-\frac{7}{25}\right)=\frac{336}{625}$

7.答案：$\frac{3(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{2}$

解析：



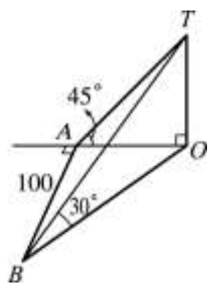
如圖

梯腳至牆角之距離為 $6\cdot\sin15^\circ$

$=6\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\frac{3(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{2}$（公尺）

8.答案：$50\sqrt{2}$

解析：



設塔高為 $\overline{OT}$

原觀測點為 A

南行後之觀測點為 B

則 $\angle OAT=45^\circ$，$\angle OBT=30^\circ$，$\overline{AB}=100$

$\overline{OA}=\frac{\overline{OT}}{\tan45^\circ}=\overline{OT}$

$\overline{OB}=\dfrac{\overline{OT}}{\tan 30°}=\sqrt{3}\ \overline{OT}$

$\overline{OB}^2=\overline{AB}^2+\overline{OA}^2$

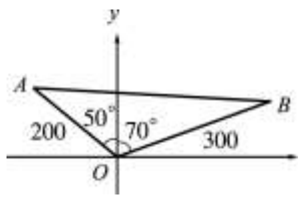
$\Rightarrow(\sqrt{3}\ \overline{OT})^2=100^2+\overline{OT}^2$

$\Rightarrow \overline{OT}^2=\dfrac{1}{2}\cdot 100^2$

$\Rightarrow \overline{OT}=\dfrac{100}{\sqrt{2}}=50\sqrt{2}$（公尺）

9.答案：$100\sqrt{19}$

解析：



設觀測點為 O，船原位於 A，後位於 B

$\angle AOB=50°+70°=120°$

$\overline{AB}^2=\overline{OA}^2+\overline{OB}^2-2\cdot\overline{OA}\cdot\overline{OB}\cdot\cos120°$

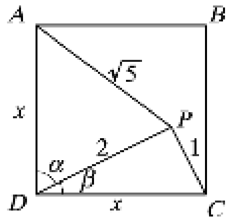
$=200^2+300^2-2\cdot200\cdot300\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)$

$=40000+90000+60000=190000$

$\Rightarrow \overline{AB}=100\sqrt{19}$（公尺）

10.答案：5

解析：令邊長 x，$\angle PDA=\alpha$，$\angle PDC=\beta$



則 $\cos\alpha=\dfrac{2^2+x^2-(\sqrt{5})^2}{2\cdot2\cdot x}=\dfrac{x^2-1}{4x}$，$\cos\beta=$

$\dfrac{2^2+x^2-1^2}{2\cdot2\cdot x}=\dfrac{x^2+3}{4x}$

由 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta=\cos^2\alpha+\cos^2(90-\alpha)=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$

得 $\left(\dfrac{x^2-1}{4x}\right)^2+\left(\dfrac{x^2+3}{4x}\right)^2=1\Rightarrow(x^2-2x^2+1)+(x^4+6x^2+9)=16x^2$

$\Rightarrow x^4-6x^2+5=0\Rightarrow x^2=1,5$（1 不合）

故正方形面積 $x^2=5$

11.答案：2

解析：所求為 $\sin^2 20°+\sin^2 40°+\cos^2 40°+\cos^2 20°=2$

12.答案：(1) 8；(2) $\sqrt{79}$

解析：(1)設 $\overline{BK}=x$

則 $\cos B=\dfrac{12^2+x^2-8^2}{2\cdot12\cdot x}=\dfrac{12^2+10^2-8^2}{2\cdot12\cdot10}$

（看△ABK）　（看△ABC）

$\Rightarrow 10(80+x^2)=180x\Rightarrow x^2-18x+80=0\Rightarrow(x-8)(x-10)=0\Rightarrow x=8$ 或 10（不合）

故 $\overline{BK}=8$

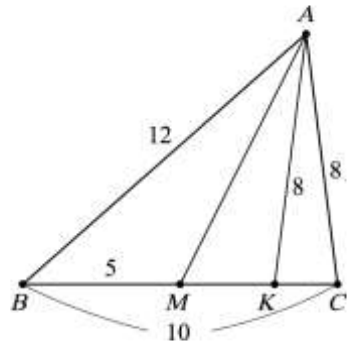
(2) M 為 $\overline{BC}$ 中點，$\overline{BM}=\dfrac{\overline{BC}}{2}=\dfrac{10}{2}=5$，

又 $\cos B=\dfrac{12^2+10^2-8^2}{2\cdot12\cdot10}=\dfrac{180}{240}=\dfrac{3}{4}$

由餘弦定理知，$\overline{AM}^2=5^2+12^2-2\cdot2\cdot5\cdot12\cdot\cos B$

$=25+144-120\times\dfrac{3}{4}=79$

$\Rightarrow \overline{AM}=\sqrt{79}$



13.答案：$-\dfrac{1}{3}$

解析：因為 $\beta=\alpha-(\alpha-\beta)$

所以 $\tan\beta=\tan[\alpha-(\alpha-\beta)]=$

$\dfrac{\tan\alpha-\tan(\alpha-\beta)}{1+\tan\alpha\tan(\alpha-\beta)}=\dfrac{1-2}{1+1\times2}=-\dfrac{1}{3}$

14.答案：(1) $-\dfrac{16}{65}$；(2) $-\dfrac{63}{65}$；(3)三

解析：$\because\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$ 且 $270°<\alpha<360°\Rightarrow\sin\alpha=-\dfrac{4}{5}$

又 $\sin\beta=\dfrac{12}{13}$ 且 $90°<\beta<180°\Rightarrow\cos\beta=-\dfrac{5}{13}$

(1) $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$=\left(-\dfrac{4}{5}\right)\left(-\dfrac{5}{13}\right)-\left(\dfrac{3}{5}\right)\left(\dfrac{12}{13}\right)=-\dfrac{16}{65}$

(2) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$=\left(\dfrac{3}{5}\right)\left(-\dfrac{5}{13}\right)+\left(-\dfrac{4}{5}\right)\left(\dfrac{12}{13}\right)=-\dfrac{63}{65}$

(3) $\because\sin(\alpha-\beta)<0$ 且 $\cos(\alpha-\beta)<0$

故 $\alpha-\beta$ 為第三象限角

15.答案：(1) $\sqrt{1-a^2}$；(2) $\dfrac{a}{\sqrt{1-a^2}}$

解析：(1) $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-a^2$

$\Rightarrow\cos\theta=\pm\sqrt{1-a^2}$（負不合）

(2) $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{a}{\sqrt{1-a^2}}$

四、計算題：每格 2 分，共 8 分

1.答案：(1) 7：10：5；(2) $\dfrac{19}{25}$

解析：(1)由正弦定理知 $\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c=7:10:5$

(2) $\because a:b:c=7:10:5$

$\therefore$ 令 $a=7k$，$b=10k$，$c=5k$，$k>0$

由餘弦定理可得 $\cos A=\dfrac{100k^2+25k^2-49k^2}{2\times10k\times5k}=\dfrac{19}{25}$

2.答案：0

解析：$\because\cos(180°-\theta)=-\cos\theta$

$\therefore\cos179°=-\cos1°$，$\cos178°=-\cos2°$

$\cos1°+\cos2°+\cos178°+\cos179°=(\cos1°+\cos179$

$^\circ$）+（$\cos 2^\circ+\cos 178^\circ$）$=0$

3.答案：$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

解析：$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=\dfrac{5}{9}\Rightarrow(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-2\sin^2\alpha$

$\cos^2\alpha=\dfrac{5}{9}$

$\Rightarrow 1-\dfrac{1}{2}(2\sin\alpha\ \cos\alpha)^2=\dfrac{5}{9}$

$\Rightarrow 1-\dfrac{1}{2}\sin^2 2\alpha=\dfrac{5}{9}\Rightarrow\sin^2 2\alpha=\dfrac{8}{9}$

又 $360^\circ<2\alpha<540^\circ\Rightarrow\sin 2\alpha>0$，故 $\sin 2\alpha=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$