**高級甲 0919 1-4　sin cos tan 和差角公式**

**姓名　　　　　座號**

**一、填充題 (10 題 每題 10 分 共 100 分)**

1.在△$ABC$ 中，已知 $\overline{AB}=5$， $\cos\angle ABC=-\frac{3}{5}$，且其外接圓半徑為 $\frac{13}{2}$，則 $\sin\angle BAC=$＿＿＿＿＿＿ .（化成最簡分數）

【99 指考甲】

解答　$\frac{33}{65}$

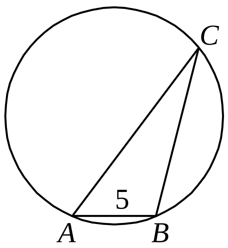
解析　利用正弦定理 $\frac{c}{\sin C}=2R$，得

$\frac{5}{\sin C}=2\cdot\frac{13}{2}\Rightarrow\sin C=\frac{5}{13}$，

再利用和角公式，得

$\sin\angle BAC=\sin(180°-(B+C))=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C$

$=\frac{4}{5}\times\frac{12}{13}+(-\frac{3}{5})\times\frac{5}{13}=\frac{33}{65}$ .




2.△$ABC$ 中，$\sin A=\frac{5}{13}$， $\cos B=-\frac{3}{5}$，求 $a:b:c=$＿＿＿＿＿＿ .

【93 台中一中期中考】

解答　25：52：33

解析　∵　$\cos B=-\frac{3}{5}$

∴　$\sin B=\frac{4}{5}$

⇒　$\sin C=\sin[180°-(A+B)]=\sin(A+B)$

$=\sin A\cdot\cos B+\cos A\cdot\sin B=\frac{5}{13}\times(-\frac{3}{5})+\frac{12}{13}\times\frac{4}{5}=\frac{33}{65}$

∴　$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=\frac{5}{13}:\frac{4}{5}:\frac{33}{65}=25:52:33$ .

3.試求 $\sin160°\cdot\cos(-25°)+\cos(-20°)\cdot\sin25°=$＿＿＿＿＿＿ .

【龍騰自命題】

解答　$\frac{\sqrt{2}}{2}$

解析　原式 $=\sin(180°-20°)\cdot\cos25°+\cos20°\cdot\sin25°=\sin20°\cdot\cos25°+\cos20°\cdot\sin25°$

$=\sin(20°+25°)=\sin45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

4.(1)若 $\alpha+\beta=45°$，試求$(1+\tan\alpha)(1+\tan\beta)$的值＿＿＿＿＿＿ .

(2)若 $\alpha+\beta=135°$，試求$(1-\tan\alpha)(1-\tan\beta)$的值＿＿＿＿＿＿ .

【龍騰自命題】

解答　(1)2;(2)2

解析　(1)$1=\tan45°=\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$

∴　$1-\tan\alpha\cdot\tan\beta=\tan\alpha+\tan\beta$

故$(1+\tan\alpha)(1+\tan\beta)=1+\tan\alpha+\tan\beta+\tan\alpha\cdot\tan\beta$

$=1+(1-\tan\alpha\cdot\tan\beta)+\tan\alpha\cdot\tan\beta=2$ .

(2)$-1=\tan135°=\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$

∴　$\tan\alpha\cdot\tan\beta-1=\tan\alpha+\tan\beta$

故$(1-\tan\alpha)\cdot(1-\tan\beta)=1-(\tan\alpha+\tan\beta)+\tan\alpha\cdot\tan\beta=2$ .

5.△$ABC$ 中，若 $\tan A\cdot\tan B=1$，則△$ABC$ 的形狀為＿＿＿＿＿＿ .

【龍騰自命題】

解答　直角三角形

解析　$\tan A\cdot\tan B=1$　⇒　$\frac{\sin A}{\cos A}\cdot\frac{\sin B}{\cos B}=1$　⇒　$\sin A\cdot\sin B=\cos A\cdot\cos B$

$\Rightarrow \quad \cos A\cdot\cos B-\sin A\cdot\sin B=0 \quad \Rightarrow$

$\cos(A+B)=0$

$\therefore \quad A+B=90°$

$\therefore \quad \triangle ABC$ 為直角三角形．

6.設 $0\le\alpha$ ，$\beta$ ，$\gamma\le45°$，且 $\tan\alpha=\frac{1}{2}$ ， $\tan\beta=\frac{1}{5}$， $\tan\gamma=\frac{1}{8}$，

求 $\alpha+\beta+\gamma=$____________．

【龍騰自命題】

解答 45°

解析 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}}=\frac{7}{9}$

$\tan[(\alpha+\beta)+\gamma]=\frac{\tan(\alpha+\beta)+\tan\gamma}{1-\tan(\alpha+\beta)\cdot\tan\gamma}=\frac{\frac{7}{9}+\frac{1}{8}}{1-\frac{7}{9}\times\frac{1}{8}}=1$

$\therefore \quad \alpha+\beta+\gamma=45°$．（$\because \quad 0\le\alpha$ ，$\beta$ ，$\gamma\le45°$）

7.設 $\alpha,\beta$ 分別是一、三象限角，且 $\sin\alpha=\frac{5}{13}$，$\sin\beta=-\frac{4}{5}$，則 $\sin(\alpha-\beta)=$____________．

【93 北一女中期中考】

解答 $\frac{33}{65}$

解析 $\sin\alpha=\frac{5}{13} \quad\Rightarrow\quad \cos\alpha=\frac{12}{13}$，$\sin\beta=-\frac{4}{5} \quad\Rightarrow$

$\cos\beta=-\frac{3}{5}$

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta=\frac{5}{13}\times(-\frac{3}{5})-(\frac{12}{13})\times(-\frac{4}{5})=\frac{33}{65}$

．

8.設 $x=a\cos\alpha+b\cos\beta$，$y=a\sin\alpha+b\sin\beta$，且 $ab\ne0$，若 $x^2+y^2=a^2+b^2$，則

(1) $\sin(\alpha-\beta)=$____________．

(2) $x\cos\alpha+y\sin\alpha=$____________．（以 $a$，$b$ 的組合表示）．

【龍騰自命題】

解答 (1) ± 1;(2)$a$

解析 (1)$\because x=a\cos\alpha+b\cos\beta$，$y=a\sin\alpha+b\sin\beta$，且 $x^2+y^2=a^2+b^2$，

$\therefore(a\cos\alpha+b\cos\beta)^2+(a\sin\alpha+b\sin\beta)^2=a^2+b^2$

$\Rightarrow a^2\cos^2\alpha+2ab\cos\alpha\cos\beta+b^2\cos^2\beta+a^2\sin^2\alpha+2ab\sin\alpha\sin\beta+b^2\sin^2\beta=a^2+b^2$

$\Rightarrow a^2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)+2ab(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)+b^2(\cos^2\beta+\sin^2\beta)=a^2+b^2$

$\Rightarrow a^2+2ab\cos(\alpha-\beta)+b^2=a^2+b^2\Rightarrow 2ab\cos(\alpha-\beta)=0$，

$\therefore\cos(\alpha-\beta)=0$，故 $\sin(\alpha-\beta)=\pm1$．

(2) $x\cos\alpha+y\sin\alpha=(a\cos\alpha+b\cos\beta)\cos\alpha+(a\sin\alpha+b\sin\beta)\sin\alpha$

$=a\cos^2\alpha+b\cos\alpha\cos\beta+a\sin^2\alpha+b\sin\alpha\sin\beta$

$=a(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)+b(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$

$=a+b\cos(\alpha-\beta)=a$（$\because\cos(\alpha-\beta)=0$）．

9.已知 $\tan A=2$，$\tan B=3$，則 $\frac{\cos(A+B)}{\sin(A-B)}=$____________．

【龍騰自命題】

解答 5

解析

$\frac{\cos(A+B)}{\sin(A-B)}=\frac{\cos A\cos B-\sin A\sin B}{\sin A\cos B-\cos A\sin B}=\frac{1-\tan A\tan B}{\tan A-\tan B}=\frac{1-6}{2-3}=5$

．

10.求 $\cos75°\cdot\cos15°+\sin75°\cdot\sin15°=$____________．

【課本類題】

解答 $\frac{1}{2}$

解析 原式$=\cos(75°-15°)=\cos60°=\frac{1}{2}$ ．