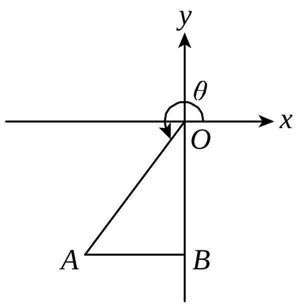
高級甲 0918 1-3 1-4　姓名　　　　座號

一、填充題 (10 題 每題 10 分 共 100 分)

1.如圖所示，角 θ 的頂點在原點 O 上，始邊是 x 軸的正方向，而 $\overline{OA}$ 為其終邊，已知 $\overline{AB}\perp\overline{OB}$，且 $\overline{OA}=5$，$\overline{OB}=4$，求 $\sin\dfrac{\theta}{2}=$____________ .



【93 中山女中期中考】

解答　$\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

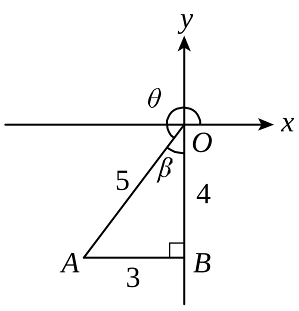
解析　$180°<\theta<270°\ \Rightarrow\ 90°<\dfrac{\theta}{2}<135°$

$\cos\beta=\dfrac{4}{5}$，$\sin\beta=\dfrac{3}{5}$

又 $\beta=270°-\theta$

$\dfrac{3}{5}=\sin\beta=\sin(270°-\theta)=-\cos\theta\ \Rightarrow\ \cos\theta=-\dfrac{3}{5}$

$\therefore\ \sin\dfrac{\theta}{2}=+\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{2}}=\sqrt{\dfrac{1+\frac{3}{5}}{2}}=\sqrt{\dfrac{4}{5}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.



2.設 $\sin\theta=\dfrac{8}{7}\cos\dfrac{\theta}{2}$，則 $\cos\theta=$____________ .

【93 成功高中期中考】

解答　-1 或 $\dfrac{17}{49}$

解析　$\sin\theta=\dfrac{8}{7}\cos\dfrac{\theta}{2}\ \Rightarrow\ 2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{8}{7}\cos\dfrac{\theta}{2}\ \Rightarrow\ \cos\dfrac{\theta}{2}(2\sin\dfrac{\theta}{2}-\dfrac{8}{7})=0$

① $\cos\dfrac{\theta}{2}=0\ \Rightarrow\ \cos\theta=2\cos^2\dfrac{\theta}{2}-1=-1$

② $2\sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{8}{7}\ \Rightarrow\ \sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{4}{7}\ \Rightarrow\ \cos\theta=1-2\sin^2\dfrac{\theta}{2}=1-2\times\dfrac{16}{49}=\dfrac{17}{49}$

由①②　$\Rightarrow$　$\cos\theta=-1$ 或 $\dfrac{17}{49}$.

3.若以 x 表示 $\sin\theta$ 的值，則(1)將方程式 $\cos4\theta=\sin\theta$ 表成 x 的四次方程式為____________ . (2)此方程式的所有實根中最小者為____________ .

【龍騰自命題】

解答　(1)$8x^4-8x^2-x+1=0$;(2)$\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}$

解析 (1)$\cos 4\theta=\sin\theta$

$2\cos^2 2\theta-1=\sin\theta$

$2(1-2\sin^2\theta)^2-1=\sin\theta$

$2(1-4\sin^2\theta+4\sin^4\theta)-1-\sin\theta=0$

$8\sin^4\theta-8\sin^2\theta-\sin\theta+1=0$

即 $8x^4-8x^2-x+1=0$．

(2)$8x^4-8x^2-x+1=0 \quad\Rightarrow\quad (x-1)(2x+1)(4x^2+2x-1)=0$

$\therefore\quad x=1$ 或 $x=-\dfrac{1}{2}$ 或 $x=\dfrac{-2\pm\sqrt{20}}{8}=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$

$\therefore$ 最小的實根為 $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}$ ．

4.設 $\cos\theta$ 為 $4x^2+4x-3=0$ 的一根，則 $\cos 3\theta=$＿＿＿＿＿＿＿＿．

【93 名校期中考】

解答 -1

解析 $4x^2+4x-3=0 \quad\Rightarrow\quad (2x+3)(2x-1)=0 \quad\Rightarrow\quad x=-\dfrac{3}{2}$（不合）或 $x=\dfrac{1}{2}=\cos\theta$

$\therefore\quad \cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta=4\cdot(\dfrac{1}{2})^3-3\cdot\dfrac{1}{2}=-1$．

5.設 $\sin\theta+3\cos\theta=0$，則 $\sin 2\theta=$＿＿＿＿＿＿＿＿．

【91 台南一中期中考】

解答 $-\dfrac{3}{5}$

解析 $\sin\theta=-3\cos\theta \quad\Rightarrow\quad \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=-3 \quad\Rightarrow\quad \tan\theta=-3$

$\therefore\quad \sin 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}=\dfrac{-6}{1+9}=-\dfrac{3}{5}$ ．

6.已知 $\alpha-\beta=45°$，求$(\tan\alpha+1)(\tan\beta-1)=$＿＿＿＿＿＿＿＿．

【91 和平高中期中考】

解答 -2

解析 $\tan(\alpha-\beta)=\tan 45°$

$\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}=1 \quad\Rightarrow\quad \tan\alpha\cdot\tan\beta-\tan\alpha+\tan\beta=-1$

$(\tan\alpha+1)(\tan\beta-1)=\tan\alpha\cdot\tan\beta-\tan\alpha+\tan\beta-1=-1-1=-2$．

7.已知圓內接四邊形 $ABCD$ 的各邊長為 $\overline{AB}=1$， $\overline{BC}=2$， $\overline{CD}=3$， $\overline{DA}=4$，則：

(1)$\cos\angle DAB=$＿＿＿＿＿＿＿＿．

(2)對角線 $\overline{BD}=$＿＿＿＿＿＿＿＿．

(3)四邊形 $ABCD$ 的面積為＿＿＿＿＿＿＿＿．

【新突破講義】

解答 (1)$\dfrac{1}{5}$;(2)$\dfrac{\sqrt{385}}{5}$;(3)$2\sqrt{6}$

解析 四邊形 $ABCD$ 為圓內接四邊形，

$\angle DAB=180°-\angle BCD \quad\Rightarrow\quad \cos\angle DAB=\cos(180°-\angle BCD)=-\cos(\angle BCD)$

且 $\sin\angle DAB=\sin(180°-\angle BCD)=\sin\angle BCD$

(1)考慮$\triangle ABD$ 和$\triangle BCD$

$\overline{BD}^2=1^2+4^2-2\times1\times4\times\cos\angle DAB=2^2+3^2-2\times2\times3\times\cos\angle BCD$ ．

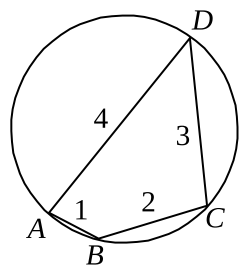
$\Rightarrow \quad 20\cos\angle DAB = 4 \quad \Rightarrow \quad \cos\angle DAB = \dfrac{1}{5}$.

(2) $\overline{BD}^2 = 1^2 + 4^2 - 2\times 1\times 4\times \cos\angle DAB = 17 - 2\times 4\times \dfrac{1}{5} = \dfrac{77}{5} \quad \Rightarrow \quad \overline{BD} = \sqrt{\dfrac{77}{5}} = \dfrac{\sqrt{385}}{5}$.

(3) $\cos\angle DAB = \dfrac{1}{5} \quad \Rightarrow \quad \sin\angle DAB = \sqrt{1-\cos^2(\angle DAB)} = \sqrt{1-(\dfrac{1}{5})^2} = \dfrac{2\sqrt{6}}{5}$

四邊形 $ABCD$ 的面積 ＝ $\triangle ABD$ 面積 ＋ $\triangle BCD$ 面積

$= \dfrac{1}{2}\times 1\times 4\times \dfrac{2\sqrt{6}}{5} + \dfrac{1}{2}\times 2\times 3\times \dfrac{2\sqrt{6}}{5} = 2\sqrt{6}$.



8.已知 $\overline{AD} // \overline{BC}$ ， $\overline{AB} = 2\sqrt{3}$ ， $\overline{BC} = 6$ ， $\overline{AD} = \overline{DC} = 2$ ，求 $\overline{AC} =$ ____________ .

【龍騰自命題】

解答 $2\sqrt{3}$

解析 $\because \quad \overline{AD} // \overline{BC}$

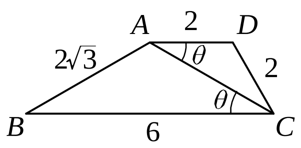
$\therefore \quad \angle ACB = \angle CAD = \theta$

令 $\overline{AC} = x$

$\triangle ABC$ 中， $\cos\theta = \dfrac{x^2 + 6^2 - (2\sqrt{3})^2}{2\cdot x\cdot 6} \cdots①$

$\triangle ACD$ 中， $\cos\theta = \dfrac{x^2 + 2^2 - 2^2}{2\cdot x\cdot 2} \cdots②$

由①② $x = 2\sqrt{3}$ 　即 $\overline{AC} = 2\sqrt{3}$.



9.$\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = 14\sqrt{3}$ ， $\angle A = 55°$， $\angle B = 65°$，求$\triangle ABC$ 之外接圓半徑長為____________ .

【課本類題】

解答 14

解析 $\angle C = 180° - 55° - 65° = 60°$

由正弦定理 $2R = \dfrac{c}{\sin 60°} = \dfrac{14\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \quad \Rightarrow \quad R = 14$.

10.設銳角三角形 ABC 的外接圓半徑為 8．已知外接圓圓心到 $\overline{AB}$ 的距離為 2，而到 $\overline{BC}$ 的距離為 7，則 $\overline{AC} =$ ____________ .（化成最簡根式）

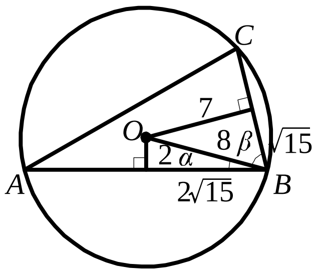
【102 學測】

解答 $4\sqrt{15}$

解析 依題意，得下圖．利用和角公式，得

$\sin B = \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \dfrac{2}{8}\times\dfrac{\sqrt{15}}{8} + \dfrac{2\sqrt{15}}{8}\times\dfrac{7}{8} = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$.

再利用正弦定理 $\dfrac{\overline{AC}}{\sin B} = 2R$ ，得 $\overline{AC} = 2R\times\sin B = 16\times\dfrac{\sqrt{15}}{4} = 4\sqrt{15}$.


C
7
O
8 β
√15
2 α
A
B
2√15