高毅甲 0917 數學詳解 1-1 1-2 1-3單一選擇題：每題10分，共30分

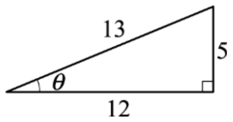
1. ( )若θ為銳角，且$\tan\theta=\frac{5}{12}$，則$\sin\theta-\cos\theta=$

(A)$\frac{5}{12}$ (B)$\frac{13}{5}$ (C)$-\frac{7}{13}$ (D)$\frac{9}{13}$ (E)$\frac{12}{5}$。

答案：(C)

解析：$\because\tan\theta=\frac{5}{12}$，且$\theta$為銳角

$\therefore$考慮如圖 5－12－13 之直角三角形



$\Rightarrow\sin\theta=\frac{5}{13}$，$\cos\theta=\frac{12}{13}\Rightarrow\sin\theta-\cos\theta=-\frac{7}{13}$

故選(C)

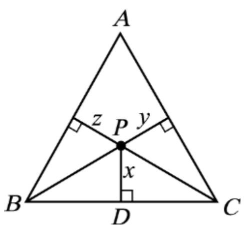
2. ( )設P為銳角$\triangle ABC$之外心，且點P到三邊$\overline{BC}$、$\overline{AC}$、$\overline{AB}$之距離依次為x、y、z，則$x:y:z=$

(A)$\sin A:\sin B:\sin C$ (B)$\cos A:\cos B:\cos C$

(C)$\tan A:\tan B:\tan C$ (D)$\frac{1}{\tan A}:\frac{1}{\tan B}:\frac{1}{\tan C}$ (E)$\frac{1}{\sin A}:\frac{1}{\sin B}:\frac{1}{\sin C}$。

答案：(B)

解析：



$\because P$為$\triangle ABC$之外心

$\therefore\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$

對於$\triangle ABC$之外接圓，$\angle A$與$\angle BPC$對同弧

$\therefore\angle BPC=2\angle A$

又$\because\overline{PD}$垂直平分$\overline{BC}$

$\therefore\angle BPD=\frac{1}{2}\angle BPC=\angle A$

得$x=\overline{PD}=\overline{PB}\cdot\cos\angle BPD=\overline{PB}\cdot\cos A$

同理$y=\overline{PC}\cdot\cos B$，$z=\overline{PB}\cdot\cos C$

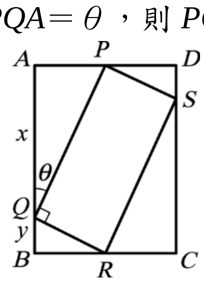
$\Rightarrow x:y:z$

$=(\overline{PB}\cdot\cos A):(\overline{PC}\cdot\cos B):(\overline{PB}\cdot\cos C)$

$=\cos A:\cos B:\cos C$

故選(B)

3. ( )如圖，$ABCD$及$PQRS$均為長方形，若$\overline{AQ}=x$，$\overline{BQ}=y$，$\angle PQA=\theta$，則$PQRS$之面積為



(A)$(x+y)\sin\theta\cos\theta$ (B)$xy(\sin\theta+\cos\theta)$ (C)$\frac{xy}{\sin\theta\cos\theta}$ (D)$xy\sin\theta\cos\theta$ (E)$\frac{x\sin\theta}{y\cos\theta}$。【高雄中學】

答案：(C)

解析：$\angle PQA=\theta$，$\angle PQR=90^\circ\Rightarrow\angle BQR=90^\circ-\theta$

又$\angle BQR+\angle QRB=90^\circ\Rightarrow\angle QRB=\theta$

考慮$\triangle PQA$，$\cos\theta=\frac{\overline{QA}}{\overline{PQ}}\Rightarrow\overline{PQ}=\frac{x}{\cos\theta}$

考慮$\triangle QBR$，$\sin\theta=\frac{\overline{QB}}{\overline{QR}}\Rightarrow\overline{QR}=\frac{y}{\sin\theta}$

$\Rightarrow PQRS$面積$=\overline{PQ}\times\overline{QR}=\frac{x}{\cos\theta}\times\frac{y}{\sin\theta}=\frac{xy}{\sin\theta\cos\theta}$

故選(C)

一、 填充題：每題 10 分，共 70 分

1. 設P點的極坐標為$[8,\theta]$且θ滿足$4\cos^2\theta-8\cos\theta-5=0$，又$\tan\theta>0$，求$P$點的直角坐標為【 】。【嘉義女中】

答案：$(-4,-4\sqrt{3})$

解析：$4\cos^2\theta-8\cos\theta-5=0\Rightarrow(2\cos\theta+1)(2\cos\theta-5)=0$

$\Rightarrow\cos\theta=-\frac{1}{2}$或$\frac{5}{2}$（不合），又$\tan\theta>0$

$\therefore\theta$在第三象限$\Rightarrow\sin\theta=-\sqrt{1-\cos^2\theta}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$[8,\theta]=(8\cos\theta,8\sin\theta)=$

$\left(8\times\left(-\frac{1}{2}\right),8\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)=(-4,-4\sqrt{3})$

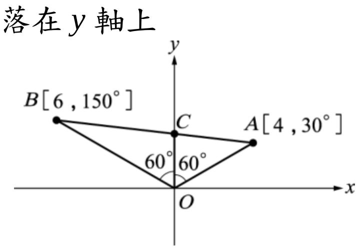
2. 已知極坐標平面上的極點O及兩點$A[4,30^\circ]$，$B[6,150^\circ]$，若$\overline{OC}$為$\angle AOB$的角平分線，C在$\overline{AB}$上，求$\overline{OC}$的長度為【 】。

答案：$\frac{12}{5}$

解析：$\angle AOB=150^\circ-30^\circ=120^\circ$，

又$\overline{OC}$為$\angle AOB$的角平分線，得$\angle AOC=\frac{120^\circ}{2}=60^\circ$

，所以C落在y軸上



又由$A[4,30^\circ]$，$B[6,150^\circ]$得點A，B的直角坐標為

$A(4\cos30^\circ,4\sin30^\circ)=(2\sqrt{3},2)$，

$B(6\cos150^\circ,6\sin150^\circ)=(-3\sqrt{3},3)$

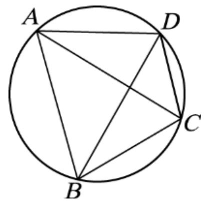
再由角平分線性質知$\overline{AC}:\overline{CB}=\overline{OA}:\overline{OB}=4:6=2:3$，

因此，由分點公式得點C坐標為

$\left(\frac{3\times2\sqrt{3}+2\times(-3\sqrt{3})}{3+2},\frac{3\times2+2\times3}{3+2}\right)=\left(0,\frac{12}{5}\right)$

所以$\overline{OC}$的長度為$\frac{12}{5}$

3. 如圖，$ABCD$為圓內接四邊形，若$\angle DBC=30^\circ$，$\angle ABD=45^\circ$，$\overline{CD}=3$，則$\overline{AD}=$【 】。【臺中一中】

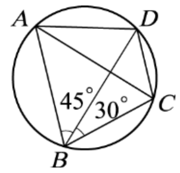


答案：$\sqrt{2}$

解析：△ABD 與△BCD 有相同外接圓 ⇒ 即有相同半徑

由正弦定理可知，$2R=\frac{3}{\sin 30^\circ}=\frac{\overline{AD}}{\sin 45^\circ}$

$\therefore \overline{AD}=\frac{3\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ}=\frac{3\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{3\times\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$



4. △ABC 中，$a=5$，$b=6$，$c=7$，試求下列之值：
$\frac{a-c\cos B}{b-c\cos A}=$【　　　　】。

答案：$\frac{6}{5}$

解析：$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{5^2+7^2-6^2}{2\cdot5\cdot7}=\frac{19}{35}$

$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{6^2+7^2-5^2}{2\cdot6\cdot7}=\frac{5}{7}$

$\frac{a-c\cos B}{b-c\cos A}=\frac{5-7\cdot\frac{19}{35}}{6-7\cdot\frac{5}{7}}=\frac{5-\frac{19}{5}}{6-5}=\frac{6}{5}$

5. 設△ABC 中，$\sin A：\sin B：\sin C=2：3：4$ 且其周長為 18 單位，求其面積為【　　　　】平方單位。【新竹高中】

答案：$3\sqrt{15}$

解析：由正弦定理知，$a：b：c=\sin A：\sin B：\sin C=2：3：4$

又已知周長為 18，則 $a=18\times\frac{2}{9}=4$，$b=18\times\frac{3}{9}=6$，$c=18\times\frac{4}{9}=8$

故半周長 $s=\frac{1}{2}\times18=9$

由海龍公式可知△ABC 面積為 $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$=\sqrt{9(9-4)(9-6)(9-8)}=\sqrt{9\cdot5\cdot3\cdot1}=3\sqrt{15}$

6. 已知△ABC 中，$\sin A：\sin B：\sin C=4：3：2$，若 $\overline{BC}=8$，試求下列各值：
(1)△ABC 面積=【　　　　】。
(2)$\sin A=$【　　　　】。【屏東高中】

答案：(1)$3\sqrt{15}$；(2)$\frac{\sqrt{15}}{4}$

解析：(1)由正弦定理知，$\sin A：\sin B：\sin C=\overline{BC}：\overline{AC}：\overline{AB}=4：3：2$

$\Rightarrow 8：\overline{AC}：\overline{AB}=4：3：2$

$\Rightarrow \overline{AC}=6$，$\overline{AB}=4$

令 $s=\frac{1}{2}\times(8+6+4)=9$，由海龍公式可得△$ABC$ 面積$=\sqrt{9\times(9-8)\times(9-6)\times(9-4)}=3\sqrt{15}$

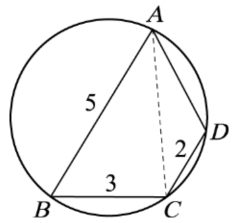
(2)由△ABC 面積$=3\sqrt{15}=\frac{abc}{4R}$，$R$ 為△ABC 之外接圓半徑，$a=\overline{BC}$，$b=\overline{AC}$，$c=\overline{AB}$

$\Rightarrow 3\sqrt{15}=\frac{8\times6\times4}{4R}\Rightarrow R=\frac{16}{\sqrt{15}}$

由正弦定理知，$\frac{\overline{BC}}{\sin A}=2R\Rightarrow \sin A=\frac{\overline{BC}}{2R}=\frac{8}{\frac{32}{\sqrt{15}}}$

$=\frac{\sqrt{15}}{4}$

7. 如圖，$ABCD$ 為圓內接四邊形，若 $\overline{AB}=5$，$\overline{BC}=3$，$\overline{CD}=2$，且 $\angle D=120^\circ$，則：



(1)$\overline{AC}=$【　　　　】。
(2)$\overline{AD}=$【　　　　】。
(3)四邊形 $ABCD$ 面積為【　　　　】。

答案：(1)$\sqrt{19}$；(2)3；(3)$\frac{21\sqrt{3}}{4}$

解析：$\because \angle D=120^\circ$　$\therefore \angle B=60^\circ$

(1)$\overline{AC}^2=5^2+3^2-2\times5\times3\times\cos60^\circ=25+9-15=19$

$\Rightarrow \overline{AC}=\sqrt{19}$

(2)設 $\overline{AD}=x$

$19=2^2+x^2-2\times2\times x\times\cos120^\circ$

$\Rightarrow x^2+2x-15=0\Rightarrow(x-3)(x+5)=0\Rightarrow x=3$ 或 -5（不合）

$\therefore \overline{AD}=3$

(3)四邊形 $ABCD$ 面積=△ABC 面積+△ACD 面積

$=\frac{1}{2}\times5\times3\times\sin60^\circ+\frac{1}{2}\times2\times3\times\sin120^\circ$

$=\frac{15\sqrt{3}}{4}+\frac{6\sqrt{3}}{4}=\frac{21\sqrt{3}}{4}$