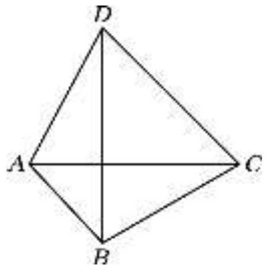
高毅甲乙 數學科 3-2　座號：　　　姓名：

一、 填充題

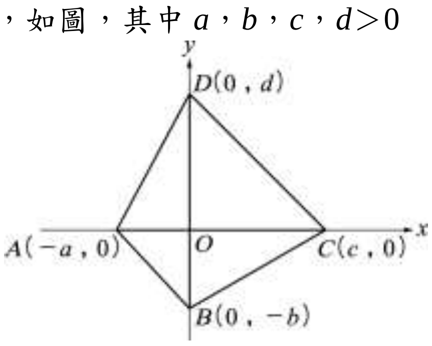
1. 如圖（此為示意圖），A，B，C，D 為平面上的四個點。已知 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{BD}$ 兩向量等長且互相垂直，則 $\tan\angle BAD=$【　　　　】。



解析：〔解法一〕

$\because \overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$

故設 $A(-a，0)$，$B(0，-b)$，$C(c，0)$，$D(0，d)$，如圖，其中 $a，b，c，d>0$



$\because \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

$\Rightarrow (c，b)=(a，-b)+(a，d)$

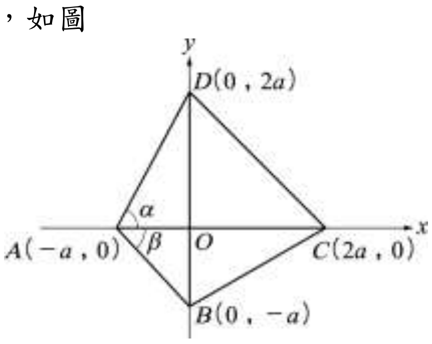
$\Rightarrow c=2a，d=2b$ ……………①

$\because |\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BD}|$

$\Rightarrow c+a=d+b$ ………………②

由①、②可得 $a=b$

即 $A(-a，0)$，$B(0，-a)$，$C(2a，0)$，$D(0，2a)$，如圖



可得 $\tan\alpha=2$，$\tan\beta=1$

故 $\tan\angle BAD=\tan(\alpha+\beta)$

$=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\times\tan\beta}=-3$

〔解法二〕

$\because \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

$\therefore \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ 且 $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$

$\because \overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$

$\therefore \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$

$\Rightarrow (2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=0$

$\Rightarrow 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+|\overrightarrow{AD}|^2-2|\overrightarrow{AB}|^2-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

$\Rightarrow |\overrightarrow{AD}|^2-2|\overrightarrow{AB}|^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0$ …………①

$\because |\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BD}|\Rightarrow|\overrightarrow{AC}|^2=|\overrightarrow{BD}|^2$

$\Rightarrow |2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}|^2=|\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}|^2$

$\Rightarrow 4|\overrightarrow{AB}|^2+4\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+|\overrightarrow{AD}|^2=|\overrightarrow{AD}|^2-2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}+|\overrightarrow{AB}|^2$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=-\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2$ ……………………………②

由①、②得 $|\overrightarrow{AD}|^2=\dfrac{5}{2}|\overrightarrow{AB}|^2\Rightarrow|\overrightarrow{AD}|=\dfrac{\sqrt{10}}{2}|\overrightarrow{AB}|$

故 $\cos\angle BAD=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AD}|}=\dfrac{-1}{\sqrt{10}}$

由廣義角的三角函數得 $\tan\angle BAD=-3$

2. 平面向量 $\overrightarrow{u}$ 和向量 $\overrightarrow{v}$ 互相垂直，且 $\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}=(4，-7)$。若 $\overrightarrow{u}$ 的長度為 6，則 $\overrightarrow{v}$ 的長度為【　　　　】。

解析：$\because \overrightarrow{u}\perp\overrightarrow{v}\Rightarrow\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=0$

又 $\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}=(4，-7)$

$\therefore |\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}|=\sqrt{16+49}=\sqrt{65}$

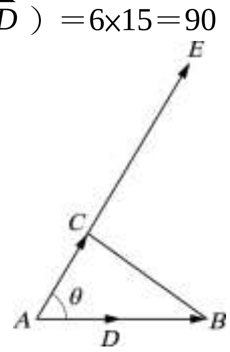
$\Rightarrow |\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}|^2=|\overrightarrow{u}|^2+|\overrightarrow{v}|^2-2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=65$

$\therefore 36+|\overrightarrow{v}|^2=65\Rightarrow|\overrightarrow{v}|^2=29$

$\therefore |\overrightarrow{v}|=\sqrt{29}$

3. 在坐標平面上的 $\triangle ABC$ 中，D 為 $\overline{AB}$ 的中點，且點 E 在射線 $\overrightarrow{AC}$ 上，滿足 $\overline{AE}=3\overline{AC}$。若向量內積 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=15$，則向量內積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=$【　　　　】。

解析：$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=(2\overrightarrow{AD})\cdot(3\overrightarrow{AC})=6(\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC})=6(\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD})=6\times15=90$



4. 設 $A(1，2)$、$B(1，-2)$ 為平面上兩定點，點 P 為 x 軸正向上的一點。若內積 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=5$，則點 P 之坐標為【　　　　】。

解析：設 $P(x，0)$，$x>0$

則 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(1-x，2)\cdot(1-x，-2)=5$

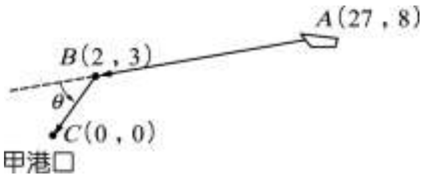
$\Rightarrow (1-x)^2-4=5\Rightarrow x=4$ 或 -2（不合）

故點 P 之坐標為 $(4，0)$

5. 如圖所示，有一船位於甲港口的東方 27 公里北方 8 公

里 A 處，直朝位於港口的東方 2 公里北方 3 公里 B 處的航標駛去，到達航標後即修正航向以便直線駛入港口。則船在航標處的航線修正應該向左轉【　　】度。（整數以下四捨五入）

解析：令 A（27，8），B（2，3），C（0，0）



則 $\overrightarrow{AB}=(-25,-5)$，$\overrightarrow{BC}=(-2,-3)$

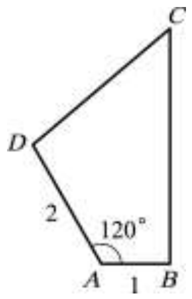
$\Rightarrow \cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AB}|\ |\overrightarrow{BC}|}=\dfrac{65}{5\sqrt{26}\times\sqrt{13}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow\ \theta=45^\circ$

故航線修正應該向左轉 45°

6. 在四邊形 $ABCD$ 中，$\angle A=120^\circ$，$\overline{AB}=1$，$\overline{AD}=2$，且 $\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}$，則 $\overline{AC}$ 的長度為【　　】。

解析：如圖，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=1\times2\times\cos120^\circ=-1$



$|\overrightarrow{AC}|^2=|3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}|^2$

$=9|\overrightarrow{AB}|^2+12\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+4|\overrightarrow{AD}|^2=9-12+16=13$

$\Rightarrow |\overrightarrow{AC}|=\sqrt{13}$

7. 設△ABC 的三邊長為 $\overline{AB}=8$，$\overline{BC}=2\sqrt{13}$，$\overline{CA}=4$，且 H 為△ABC 的垂心，若 $\overrightarrow{AH}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，則數對 $(x,y)=$【　　】。

解析：$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{2}(b^2+c^2-a^2)=\dfrac{1}{2}(16+64-52)=14$

H 為垂心 $\Rightarrow \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=14$

令 $\overrightarrow{AH}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}\Rightarrow$

$$\begin{cases}\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}=x|\overrightarrow{AB}|^2+y\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+y|\overrightarrow{AC}|^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}64x+14y=14\\14x+16y=14\end{cases}$$

解得 $x=\dfrac{7}{207}$，$y=\dfrac{175}{207}$，故數對 $(x,y)=\left(\dfrac{7}{207},\dfrac{175}{207}\right)$

8. 設 O 為坐標平面上的原點，P 點坐標為（2，1），若 A，B 分別是正 x 軸及正 y 軸上的點，使得 $\overrightarrow{PA}\perp\overrightarrow{PB}$，則△$OAB$ 面積的最大可能值為【　　】。

解析：依題意，設 $A(a,0)$，$B(0,b)$，其中 $a,b>0$

因為 $\overrightarrow{PA}\perp\overrightarrow{PB}$，所以 $(a-2,-1)\cdot(-2,b-1)=0\Rightarrow 2a+b=5$

由算幾不等式知 $\dfrac{2a+b}{2}\geqq\sqrt{2a\cdot b}\Rightarrow 2ab\leqq\left(\dfrac{5}{2}\right)^2\Rightarrow$

$\dfrac{1}{2}ab\geqq\dfrac{1}{4}\times\dfrac{25}{4}=\dfrac{25}{16}$

故△OAB 面積的最大可能值為 $\dfrac{25}{16}$

9. 平面向量 $\vec{u}$ 和向量 $\vec{v}$ 互相垂直，且 $\vec{u}-\vec{v}=(4,-7)$。若 $\vec{u}$ 的長度為 6，則 $\vec{v}$ 的長度為【　　】。

解析：$\because \vec{u}\perp\vec{v}\Rightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

又 $\vec{u}-\vec{v}=(4,-7)$

$\therefore|\vec{u}-\vec{v}|=\sqrt{16+49}=\sqrt{65}$

$\Rightarrow|\vec{v}-\vec{v}|^2=|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}=65$

$\Rightarrow 36+|\vec{v}|^2=65\Rightarrow|\vec{v}|^2=29$

$\Rightarrow|\vec{v}|=\sqrt{29}$

10. 設點 $A(-2,2)$，$B(4,8)$ 為坐標平面上兩點，且點 C 在二次函數 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ 的圖形上變動。當 C 點的 x 坐標為【　　】時，內積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ 有最小值【　　】。

解析：設點 $C\left(t,\dfrac{1}{2}t^2\right)$，

則 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(6,6)\cdot\left(t+2,\dfrac{1}{2}t^2-2\right)=3t^2+6t=3(t+1)^2-3$

當 $t=-1$ 時，有最小值 -3

二、計算題

1. 兩向量 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的夾角為 60°，$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，試求：

（1）$|\vec{a}+\vec{b}|$。

（2）$|2\vec{a}-\vec{b}|$。

解：

解析：$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta=1\cdot2\cdot\cos60^\circ=1$

（1）$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2(\vec{a}\cdot\vec{b})+|\vec{b}|^2=1^2+2\cdot1+2^2=7$，故 $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{7}$

（2）$|2\vec{a}-\vec{b}|^2=4|\vec{a}|^2-4(\vec{a}\cdot\vec{b})+|\vec{b}|^2=4\cdot1^2-4\cdot1+2^2=4$，故 $|2\vec{a}-\vec{b}|=2$

2. 已知圓 $C：x^2+y^2=r^2$（$r>0$），直線 $L：3x+4y=5$，試求 r 的範圍使圓 C 與直線 L 有交點。

解：

解析：由柯西不等式得 $(x^2+y^2)(3^2+4^2)\geqq(3x+4y)^2$

若 x，y 同時滿足 $x^2+y^2=r^2$ 與 $3x+4y=5$，

代入上式得 $r^2\cdot25\geqq5^2$，即 $r^2\geqq1$

又由 $r>0$，可得 $r\geqq1$

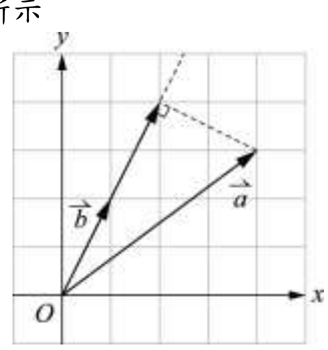
3. 設 $\overrightarrow{a}=(4,3)$，$\overrightarrow{b}=(1,2)$，試求：

（1）$\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{b}$ 上的正射影。

（2）$\overrightarrow{b}$ 在 $\overrightarrow{a}$ 上的正射影。

解：

解析：（1）如圖所示

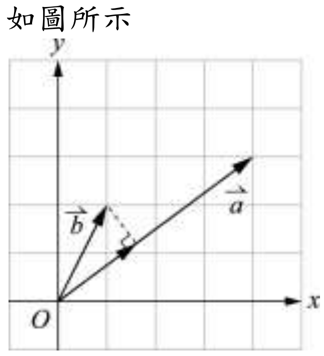


$\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{b}$ 上的正射影為

$$\left(\frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{b}|^2}\right)\overrightarrow{b}=\frac{4\cdot1+3\cdot2}{1^2+2^2}(1,2)$$

$=2(1,2)=(2,4)$

（2）同理，如圖所示

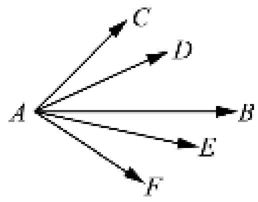


$\overrightarrow{b}$ 在 $\overrightarrow{a}$ 上的正射影為

$$\left(\frac{\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a}}{|\overrightarrow{a}|^2}\right)\overrightarrow{a}=\frac{1\cdot4+2\cdot3}{4^2+3^2}(4,3)$$

$=\dfrac{2}{5}(4,3)=\left(\dfrac{8}{5},\dfrac{6}{5}\right)$

4. 如圖，請問向量 $\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{AF}$ 中，與向量 $\overrightarrow{AB}$ 內積的結果，最大與最小分別是哪一個？



解：

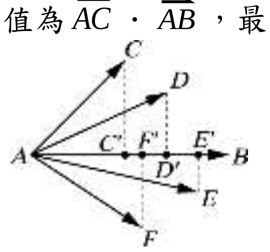
解析：$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC'}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AC'}||\overrightarrow{AB}|$

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD'}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AD'}||\overrightarrow{AB}|$

$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AE'}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AE'}||\overrightarrow{AB}|$

$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AF'}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AF'}||\overrightarrow{AB}|$

故得內積最小值為 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$，最大值為 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}$



5. 設 $\overrightarrow{a}=(p,q)$，$\overrightarrow{b}=(r,s)$，已知 $|\overrightarrow{a}|=3$，$|\overrightarrow{b}|=4$，試求 $pr+qs$ 的範圍。

解：

解析：$|\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}|\leqq|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\Rightarrow|pr+qs|\leqq12$

$\Rightarrow-12\leqq pr+qs\leqq12$