0103　高級甲乙 3-3 面積與二階行列式

姓名　　　　　　　　座號

一、填充題 (5 題 每題 10 分 共 50 分)

1.求下列各行列式的值

(1) $\begin{vmatrix} 23 & 46 \\ 61 & 122 \end{vmatrix}=$____0________(5 分)

(1) $\begin{vmatrix} 23 & 46 \\ 61 & 122 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 23 & 0 \\ 61 & 0 \end{vmatrix}=0$.

$\times(-2)$

(2) $\begin{vmatrix} 44 & 55 \\ 26 & 39 \end{vmatrix}=$_____286_______(5 分)

(2) $\begin{vmatrix} 44 & 55 \\ 26 & 39 \end{vmatrix}=11\times13\times\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=143\times(12-10)=286$

【課本類題】

2.若 $\sqrt{7-\sqrt{40}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$，求行列式 $\begin{vmatrix} x & y \\ -3 & 2 \end{vmatrix}=$_____16_______(10 分)

$\sqrt{7-\sqrt{40}}=\sqrt{7-2\sqrt{10}}=\sqrt{5}-\sqrt{2}$

$x=5$，$y=2$，∴ $\begin{vmatrix} x & y \\ -3 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}=10-(-6)=16$.

【課本類題】

3.求由向量 $\overrightarrow{a}=(5,8)$，$\overrightarrow{b}=(-4,-3)$ 所張出的

(1)平行四邊形面積為___17_________，_(5 分)

(1)平行四邊形面積為 $\left|\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ -4 & -3 \end{vmatrix}\right|=17$.

(2)三角形面積為___$\dfrac{17}{2}$_________(5 分)

三角形面積為 $\dfrac{17}{2}$.

【課本類題】

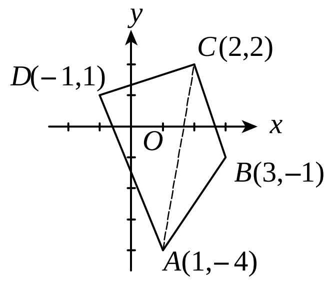
4.已知 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=2$，求 $\begin{vmatrix} 5a-7b & 3b \\ 5c-7d & 3d \end{vmatrix}=$_____30_______ .

$\begin{vmatrix} 5a-7b & 3b \\ 5c-7d & 3d \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} 5a-7b & b \\ 5c-7d & d \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} 5a & b \\ 5c & d \end{vmatrix}=3\times5\times\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=15\times2=30$.

$\times7$

5.以 $(1,-4),(2,2),(3,-1),(-1,1)$ 為頂點之凸四邊形面積為_____13_______ .

解析　如圖，



令 $A(1,-4)$，$B(3,-1)$，$C(2,2)$，$D(-1,1)$

$\overrightarrow{AB}=(2,3)$，$\overrightarrow{AC}=(1,6)$，$\overrightarrow{AD}=(-2,5)$

△ABC 面積 $=\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}\right|=\dfrac{9}{2}$

△ACD 面積 $=\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}\right|=\dfrac{17}{2}$

∴ 四邊形 $ABCD$ 面積為 $\dfrac{9}{2}+\dfrac{17}{2}=13$.

【課本類題】

二、計算題 (5 題 每題 10 分 共 50 分)

1.已知聯立方程式 $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ 的解為 $x=1$，$y=-2$，求聯立方程式 $\begin{cases} 3b_1x-2a_1y=6c_1 \\ 3b_2x-2a_2y=6c_2 \end{cases}$ 的解 .

【課堂講義】

解答　$x=-4$，$y=-3$

解析　因為聯立方程式 $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ 恰有一組解，由克拉瑪公式，得

$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq0$，$\Delta_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$，$\Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$，且滿足

$\dfrac{\Delta_x}{\Delta}=1$，$\dfrac{\Delta_y}{\Delta}=-2$.

又所求聯立方程式其

$\Delta'=\begin{vmatrix} 3b_1 & -2a_1 \\ 3b_2 & -2a_2 \end{vmatrix}=3\times(-2)\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix}=(-6)\times(-\Delta)=6\Delta\neq0$

$\Delta_x{}'=\begin{vmatrix} 6c_1 & -2a_1 \\ 6c_2 & -2a_2 \end{vmatrix}=6\times(-2)\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}=(-12)\times(-\Delta_y)=12\Delta_y$

，

$\Delta_y{}'=\begin{vmatrix} 3b_1 & 6c_1 \\ 3b_2 & 6c_2 \end{vmatrix}=3\times6\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}=18\times(-\Delta_x)=-18\Delta_x$.

故所求聯立方程式的解為

$$x=\frac{\Delta_x{}'}{\Delta'}=\frac{12\Delta_y}{6\Delta}=\frac{12}{6}\times(-2)=-4\ ,$$

$$y=\frac{\Delta_y{}'}{\Delta'}=\frac{-18\Delta_x}{6\Delta}=\frac{-18}{6}\times 1=-3\ .$$

2.利用克拉瑪公式解$\begin{cases}5x+2y=13\\4x+3y=7\end{cases}$．(x,y)=(_____,_____)(10 分)

【課本類題】

解答 $x=\frac{25}{7}$， $y=-\frac{17}{7}$

解析 $\Delta=\begin{vmatrix}5&2\\4&3\end{vmatrix}=7$， $\Delta_x=\begin{vmatrix}13&2\\7&3\end{vmatrix}=25$， $\Delta_y=\begin{vmatrix}5&13\\4&7\end{vmatrix}=-17$

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{25}{7}\ ,\quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=-\frac{17}{7}\ .$$

3.已知由向量 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 所張出的平行四邊形面積為 4，求由向量

$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ 與 $3\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}$ 所張出的平行四邊形面積．

【課堂講義】

解答 20

解析 設 $\overrightarrow{a}=(x_1,y_1)$， $\overrightarrow{b}=(x_2,y_2)$．依題意，可列得

$$\left|\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix}\right|=4\ .$$

因為由 $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=(x_1+x_2,y_1+y_2)$ 與

$3\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}=(3x_1-2x_2,3y_1-2y_2)$ 所張出的平行四邊形

面積為$\left|\begin{vmatrix}x_1+x_2&y_1+y_2\\3x_1-2x_2&3y_1-2y_2\end{vmatrix}\right|$，且

$$\begin{vmatrix}x_1+x_2&y_1+y_2\\3x_1-2x_2&3y_1-2y_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_1+x_2&y_1+y_2\\3x_1&3y_1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_1+x_2&y_1+y_2\\-2x_2&-2y_2\end{vmatrix}$$

$$=\left(\begin{vmatrix}x_1&y_1\\3x_1&3y_1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_2&y_2\\3x_1&3y_1\end{vmatrix}\right)+\left(\begin{vmatrix}x_1&y_1\\-2x_2&-2y_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_2&y_2\\-2x_2&-2y_2\end{vmatrix}\right)$$

$$=\left(0+3\begin{vmatrix}x_2&y_2\\x_1&y_1\end{vmatrix}\right)+\left(-2\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix}+0\right)$$

$$=-3\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix}=-5\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix}\ ,$$

所以所求平行四邊形的面積為$|-5\times 4|=20$．

4.已知$\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=3$，求$\begin{vmatrix}2a+3b&4a-5b\\2c+3d&4c-5d\end{vmatrix}$的值．

【課本例習題】

解答 -66

解析 利用二階行列式的性質，得

$$\begin{vmatrix}2a+3b&4a-5b\\2c+3d&4c-5d\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2a&4a-5b\\2c&4c-5d\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}3b&4a-5b\\3d&4c-5d\end{vmatrix}$$

$\times(-2)$ $\quad\times\frac{5}{3}$

$$=\begin{vmatrix}2a&-5b\\2c&-5d\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}3b&4a\\3d&4c\end{vmatrix}=2\cdot(-5)\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}+3\cdot 4\begin{vmatrix}b&a\\d&c\end{vmatrix}$$

$$=(-10)\cdot 3+12\cdot(-3)=-66\ .$$

5.設聯立方程式$\begin{cases}x+3y=kx\\5x+3y=ky\end{cases}$除了 $x=0$，$y=0$ 之外還有其他的解，求實數 k 的值．

【課堂講義】

解答 -2 或 6

解析 將原聯立方程式改寫為$\begin{cases}(1-k)x+3y=0\\5x+(3-k)y=0\end{cases}$．因為聯立方程式除了 $x=0$，$y=0$ 之外還有其他的解，表示聯立方程式有無限多組解，所以 $\Delta=0$，即

$$\begin{vmatrix}1-k&3\\5&3-k\end{vmatrix}=k^2-4k-12=0\ ,$$ 解得 $k=-2$ 或 6．