5. 若方程組 $\begin{cases} x+(3-a)y-5=0 \\ (3-a)x+y+5=0 \end{cases}$ 無解，則常數 a 之值為___2___。 (10分)

解：$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 3-a \\ 3-a & 1 \end{vmatrix}=1-(3-a)^2=-(a^2-6a+8)=-(a-2)(a-4)$

$\Delta_x=\begin{vmatrix} 5 & 3-a \\ -5 & 1 \end{vmatrix}=5+5(3-a)=5(4-a)$

$\Delta_y=\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3-a & -5 \end{vmatrix}=-5-5(3-a)=5(a-4)$

當 $a=2$ 時，$\Delta=0$，$\Delta_x\neq0$，$\Delta_y\neq0$

$\therefore$ 此時方程組無解

6. 設方程組 $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ 的解為 $x=-4$，$y=6$，則方程組 $\begin{cases} a_1x+3b_1y=2c_1 \\ a_2x+3b_2y=2c_2 \end{cases}$ 的解 $(x,y)=$ ___$(-8,4)$___。 (10分)

解：依題意 $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$，$x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}=-4$，$y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}=6$

$\therefore \begin{cases} a_1x+3b_1y=2c_1 \\ a_2x+3b_2y=2c_2 \end{cases}$ 之解 $x=\dfrac{\begin{vmatrix} 2c_1 & 3b_1 \\ 2c_2 & 3b_2 \end{vmatrix}}{3\cdot\Delta}=\dfrac{6\Delta_x}{3\Delta}=\dfrac{6}{3}\times(-4)=-8$，

$y=\dfrac{\begin{vmatrix} a_1 & 2c_1 \\ a_2 & 2c_2 \end{vmatrix}}{3\cdot\Delta}=\dfrac{2\Delta_y}{3\Delta}=\dfrac{2}{3}\times6=4$

$\therefore (x,y)=(-8,4)$

7. 設 $8x-3y-6z=0$，$10x-5y-8z=0$，且 $xyz\neq0$，求 $\dfrac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}=$ ___$-\dfrac{1}{38}$___。 (15分)

解：$\because \begin{cases} 8x-3y=6z \\ 10x-5y=8z \end{cases}$，$\Delta=\begin{vmatrix} 8 & -3 \\ 10 & -5 \end{vmatrix}=-10$，

$\Delta_x=\begin{vmatrix} 6z & -3 \\ 8z & -5 \end{vmatrix}=-30z+24z=-6z$，$\Delta_y=\begin{vmatrix} 8 & 6z \\ 10 & 8z \end{vmatrix}=64z-60z=4z$

$\therefore x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}=\dfrac{-6z}{-10}=\dfrac{3}{5}z$，$y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}=\dfrac{4z}{-10}=-\dfrac{2}{5}z$

$\Rightarrow x:y:z=\dfrac{3}{5}z:(-\dfrac{2}{5}z):z=3:(-2):5$

令 $x=3t$，$y=-2t$，$z=5t$，則 $\dfrac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}=\dfrac{-6t^2-10t^2+15t^2}{9t^2+4t^2+25t^2}=-\dfrac{1}{38}$

8. 已知由向量 $\overrightarrow{u}=(a,b)$，$\overrightarrow{v}=(c,d)$ 所張平行四邊形的面積為 2，則由向量 $2\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ 與 $\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$ 所張出的平行四邊形面積為___6___。 (15分)

解：$2\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}=2(a,b)+(c,d)=(2a+c,2b+d)$

$\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}=(a,b)-(c,d)=(a-c,b-d)$

$\therefore$ 所求面積為 $\left|\begin{vmatrix} 2a+c & 2b+d \\ a-c & b-d \end{vmatrix}\right|$

$=\left|\begin{vmatrix} 2a+c & 2b+d \\ a & b \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 2a+c & 2b+d \\ -c & -d \end{vmatrix}\right|=\left|\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 2a & 2b \\ -c & -d \end{vmatrix}\right|$

$=\left|-\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}+(-2)\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\right|=3\left|\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\right|=3\times2=6$

(註：可利用 $\left|\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\right|\times2=3\times2=6$)