

5. 設 x, y 為實數，且 $3x-4y=15$ ，求 x^2+y^2 的最小值為 9，此時數對 $(x, y) =$
 $(\frac{9}{5}, -\frac{12}{5})$ 。(每格 10 分，共 20 分)

解：由柯西不等式得 $(x^2+y^2)[3^2+(-4)^2] \geq (3x-4y)^2$
 $(x^2+y^2) \times 25 \geq 225 \Rightarrow x^2+y^2 \geq 9$
 $\therefore x^2+y^2$ 最小值為 9

$$\text{此時 } \frac{x}{3} = \frac{y}{-4} = t$$

$$\therefore x=3t, y=-4t \text{ 代入 } 3 \times 3t - 4 \times (-4t) = 15 \Rightarrow 25t = 15 \therefore t = \frac{3}{5}$$

$$\therefore (x, y) = (\frac{9}{5}, -\frac{12}{5})$$

6. 坐標平面上 $A(2, -2), B(-1, 4)$ ，若直線 $2x-3y=1$ 交 \overline{AB} 於 Q 點，求 $\overline{AQ} : \overline{BQ} =$
3 : 5。(10 分)

解： $\overline{AQ} : \overline{BQ} = d(A, L) : d(B, L)$
 $= \frac{|4+6-1|}{\sqrt{4+9}} : \frac{|-2-12-1|}{\sqrt{4+9}}$
 $= 9 : 15 = 3 : 5$

7. 求兩直線 $L_1: 2x+3y-3=0$ 與 $L_2: 3x-2y+1=0$ 的交角平分線方程式為
 $5x+y-2=0$ 或 $x-5y+4=0$ 。(10 分)

解：設 $P(x, y)$ 為角平分線上任一點，則 $d(P, L_1) = d(P, L_2)$

$$\therefore \text{所求角平分線方程式為 } \frac{|2x+3y-3|}{\sqrt{2^2+3^2}} = \frac{|3x-2y+1|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}$$

$$\text{即 } 2x+3y-3 = \pm(3x-2y+1)$$

$$\text{整理得 } 5x+y-2=0 \text{ 或 } x-5y+4=0$$

8. 求過圓外一點 $P(4, 3)$ 且與圓 $C: (x-2)^2+y^2=4$ 相切的切線方程式為
 $5x-12y+16=0$ 或 $x=4$ 。(兩解)(20 分)

解：設切線方程式為 $y-3=m(x-4) \Rightarrow mx-y-4m+3=0$

圓心 $(2, 0)$ 到切線的距離為 2

$$\therefore \frac{|2m-0-4m+3|}{\sqrt{m^2+1}} = 2 \Rightarrow |-2m+3| = 2\sqrt{m^2+1}$$

$$\text{兩邊平方，解得 } m = \frac{5}{12}$$

$$\therefore \text{切線為 } y-3 = \frac{5}{12}(x-4) \Rightarrow 5x-12y+16=0$$

另有一條垂直切線 $x=4$

