

5. 直線  $L: 3x+y=7$  與圓  $C: (x+1)^2+y^2=20$  是否相交？若相交請求出它們的交點。

解：
$$\begin{cases} 3x+y=7 \\ (x+1)^2+y^2=20 \end{cases} \quad (10 \text{ 分})$$

將  $y=7-3x$  代入得  $(x+1)^2+(7-3x)^2=20$

$\Rightarrow 10x^2-40x+30=0 \Rightarrow x^2-4x+3=0 \Rightarrow (x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=1$  或  $3$

$\therefore (x,y)=(1,4)$  或  $(3,-2)$

$\therefore$  直線  $L$  與圓  $C$  交於兩點  $(1,4), (3,-2)$

6. 設一圓與直線  $2x-5y-6=0$  及  $2x-5y+10=0$  都相切，且圓心在直線  $x-2y+2=0$  上，則此圓的圓心為  $(-6, -2)$ 。  
(8 分)

解： $\because$  圓與  $2x-5y-6=0$  及  $2x-5y+10=0$  都相切  $\therefore$  圓心必通過  $2x-5y+2=0$

解  $\begin{cases} 2x-5y+2=0 \\ x-2y+2=0 \end{cases}$ ，得圓心  $(-6, -2)$

7. 設圓  $C$  的一般式為  $x^2+y^2-8x+4y-5=0$ 。

(1) 將圓  $C$  化為標準式： $(x-4)^2+(y+2)^2=5^2$ 。  
(6 分)

(2) 若  $A(7, 2)$  為圓  $C$  上的一點，則過  $A$  點且與圓  $C$  相切的切線方程式為

$3x+4y-29=0$ 。  
(10 分)

解：(1)  $x^2+y^2-8x+4y-5=0$

$\Rightarrow (x^2-8x+16)+(y^2+4y+4)=5+16+4$

$\Rightarrow (x-4)^2+(y+2)^2=5^2$  為圓  $C$  的標準式

(2)  $\because A(7, 2)$  在圓  $C$  上，故所求的切線方程式為

$(7-4)(x-4)+(2+2)(y+2)=5^2$

$\Rightarrow 3(x-4)+4(y+2)=25$

$\Rightarrow 3x+4y-29=0$

8. 設圓  $C: x^2+y^2-8x-4y+11=0$ ，自圓外一點  $P(1, 6)$  作圓  $C$  的兩切線，切點分別為  $A$ ， $B$ ，求：

(1) 切線段  $\overline{PA}$  的長度為 4。  
(8 分)

(2)  $\sin \angle APB = \frac{24}{25}$ 。  
(8 分)

解：(1) 圓  $C: (x-4)^2+(y-2)^2=9$ ，圓心  $O(4, 2)$ ，半徑  $=3$

$\overline{PO} = \sqrt{(1-4)^2+(6-2)^2} = \sqrt{25} = 5$

$\overline{PA} = \sqrt{\overline{PO}^2 - \overline{OA}^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$

(2) 令  $\angle APO = \angle BPO = \theta$ ， $\sin \theta = \frac{\overline{OA}}{\overline{OP}} = \frac{3}{5}$ ， $\cos \theta = \frac{4}{5}$

$\therefore \sin \angle APB = \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cdot \cos \theta = 2 \times \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$

