

1. 設圓 C 的一般式為 $x^2+y^2-4x+6y+4=0$ ，則圓 C 的圓心坐標為 $(2, -3)$ ，半徑為 3。
(每格 8 分，共 16 分)

$$\text{解：} x^2+y^2-4x+6y+4=0 \Rightarrow (x^2-4x+4)+(y^2+6y+9)=9$$

$$\therefore (x-2)^2+(y+3)^2=3^2$$

$$\therefore \text{圓心 } (2, -3), \text{ 半徑 } = 3$$

2. 通過三點 $(-1, 5), (0, 2), (-5, 7)$ 的圓方程式是 $(x+5)^2+(y-2)^2=25$ ，其面積 $= 25\pi$ 。
(每格 8 分，共 16 分)

解：設圓 C 為 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$ 三點代入圓 C

$$\Rightarrow \begin{cases} 1+25-d+5e+f=0 \\ 0+4+2e+f=0 \\ 25+49-5d+7e+f=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -d+5e+f=-26 \\ 2e+f=-4 \\ -5d+7e+f=-74 \end{cases}$$

$$\therefore d=10, e=-4, f=4$$

$$\therefore x^2+y^2+10x-4y+4=0, \text{ 即 } (x+5)^2+(y-2)^2=25$$

$$\text{圓面積} = 25\pi$$

3. 坐標平面上，圓 $C: x^2+y^2+4x+2y-20=0$ ，圓外一點 $P(6, 3)$ ，過 P 對圓 C 做切線，切點為 A, B ，則過 P, A, B 三點的圓方程式為 $(x-2)^2+(y-1)^2=20$ 。
(8 分)

解：圓 $C: (x+2)^2+(y+1)^2=5^2$ ，圓心 $Q(-2, -1)$

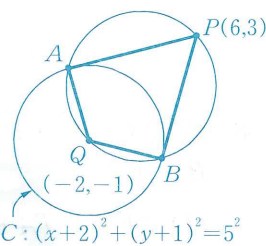
由圖可知四邊形 $PAQB$ 之對角互補 ($\angle PAQ = \angle PBQ = 90^\circ$)

\therefore 過 P, A, B 三點之圓亦過 Q 點，即所求圓為以 \overline{PQ} 為直徑之圓

令 \overline{PQ} 中點為 $M(2, 1)$

$$\overline{PM} = \sqrt{(6-2)^2+(3-1)^2} = \sqrt{20}$$

$$\therefore (x-2)^2+(y-1)^2=20$$



4. 試就實數 k 的範圍，討論二元二次方程式 $x^2+y^2-6x+ky+6-2k=0$ 的圖形。
(10 分)

解：判別式 $D=d^2+e^2-4f=(-6)^2+k^2-4(6-2k)=k^2+8k+12=(k+2)(k+6)$

(1) 若 $D > 0$ ，則 $k > -2$ 或 $k < -6$ 時，圖形為一圓

(2) 若 $D = 0$ ，則 $k = -2$ 或 $k = -6$ 時，圖形為一點

(3) 若 $D < 0$ ，則 $-6 < k < -2$ 時，沒有圖形