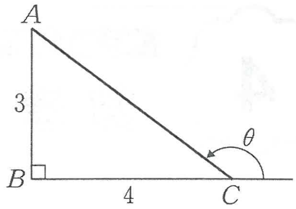
4. 如右圖，θ 為一有向角，$\overline{AB}=3$，$\overline{BC}=4$，$\overline{AB}\perp\overline{BC}$，試求：

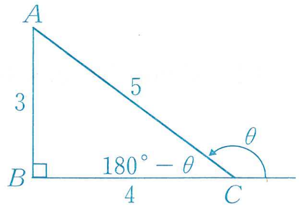


(1) $\cos 2\theta=$ $\underline{\dfrac{7}{25}}$。（8 分）

(2) $\sin\dfrac{\theta}{2}=$ $\underline{\dfrac{3\sqrt{10}}{10}}$。（8 分）

解：$\sin(180°-\theta)=\dfrac{3}{5}\Rightarrow\sin\theta=\dfrac{3}{5}$

$\cos(180°-\theta)=\dfrac{4}{5}\Rightarrow\cos\theta=\dfrac{-4}{5}$



(1) $\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=\dfrac{16}{25}-\dfrac{9}{25}=\dfrac{7}{25}$

(2) $\sin\dfrac{\theta}{2}=\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{2}}=\sqrt{\dfrac{1-(\frac{-4}{5})}{2}}=\sqrt{\dfrac{9}{10}}=\dfrac{3}{\sqrt{10}}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

5. 設 θ 為銳角，且 $\sin\theta$，$\cos 2\theta$ 為 $9x^2-7x+k=0$ 之兩根，則 $k=$ $\underline{\dfrac{2}{3}}$。（10 分）

解：兩根和 $\sin\theta+\cos 2\theta=\dfrac{7}{9}\Rightarrow\sin\theta+1-2\sin^2\theta=\dfrac{7}{9}$

$\Rightarrow 18\sin^2\theta-9\sin\theta-2=0$ 得 $\sin\theta=\dfrac{2}{3}$ 或 $\dfrac{-1}{6}$（不合）

$\Rightarrow\cos 2\theta=\dfrac{7}{9}-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{9}$，所以兩根積 $\dfrac{k}{9}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{9}\Rightarrow k=\dfrac{2}{3}$

6. 設 $\tan(45°+\theta)=-2$，則 $\tan 2\theta=$ $\underline{-\dfrac{3}{4}}$。（10 分）

解：$\tan(45°+\theta)=-2\Rightarrow\dfrac{\tan45°+\tan\theta}{1-\tan45°\tan\theta}=-2\Rightarrow\dfrac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}=-2\Rightarrow\tan\theta=3$

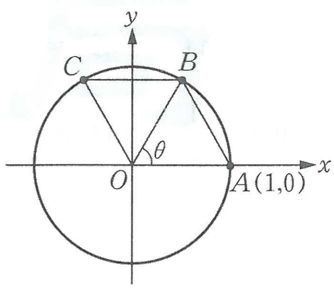
$\therefore\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\dfrac{2\cdot3}{1-3^2}=-\dfrac{3}{4}$

7. 以 $x-\cos 20°$ 除 $4x^3-3x+10$ 的餘式為 $\underline{\dfrac{21}{2}}$。（10 分）

解：利用餘式定理知餘式為

$4\cos^3 20°-3\cos 20°+10=\cos(3\times20°)+10=\cos 60°+10=10\dfrac{1}{2}=\dfrac{21}{2}$

8. 坐標平面上，以原點 O 為圓心的圓上有三個相異點 $A(1,0)$，B，C 且 $\overline{AB}=\overline{BC}$，已知銳角△$OAB$ 的面積為 $\dfrac{2}{5}$，則△OAC 面積為 $\underline{\dfrac{12}{25}}$。（10 分）



解：$\triangle AOB=\dfrac{2}{5}=\dfrac{1}{2}\times1\times1\times\sin\theta$

$\Rightarrow\sin\theta=\dfrac{4}{5}$，$\cos\theta=\dfrac{3}{5}$（$\theta$ 為銳角）

又弦 $\overline{AB}=$ 弦 $\overline{BC}$　$\therefore\angle AOB=\angle BOC=\theta\Rightarrow\angle AOC=2\theta$

$\therefore\triangle AOC=\dfrac{1}{2}\times1\times1\times\sin 2\theta=\dfrac{1}{2}\times2\sin\theta\cdot\cos\theta=\dfrac{1}{2}\times2\times\dfrac{4}{5}\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{12}{25}$