

一、單選題 (25 題 每題 4 分 共 100 分)

() 1. 若 $3^{x+2} = 3^x + 24\sqrt{3}$ ，則 $x =$ (A) $-\frac{1}{2}$ (B) 1 (C) $\frac{3}{2}$ (D) 2

【102 年歷屆試題】

解答 C

解析 $3^{x+2} = 3^x \times 3^2 = 9 \times 3^x$

$$24\sqrt{3} = 8 \times 3 \times \sqrt{3} = 8 \times 3 \times 3^{\frac{1}{2}} = 8 \times 3^{1+\frac{1}{2}} = 8 \times 3^{\frac{3}{2}}$$

$$\text{原式} \Rightarrow 9 \times 3^x = 3^x + 8 \times 3^{\frac{3}{2}} \Rightarrow 9 \times 3^x - 3^x = 8 \times 3^{\frac{3}{2}} \Rightarrow 8 \times 3^x = 8 \times 3^{\frac{3}{2}}$$

$$\stackrel{+8}{\Rightarrow} 3^x = 3^{\frac{3}{2}}$$

$$\text{故 } x = \frac{3}{2}$$

() 2. 設 $\log 2 = 0.3010$ ，則 5^{10} 為幾位數？ (A) 9 (B) 8 (C) 5 (D) 7

【龍騰自命題】

解答 D

解析 $\log 5^{10} = 10 \log 5 = 10(1 - \log 2) = 10 \times 0.699 = 6.99 \quad \therefore 5^{10}$ 為 7 位數

() 3. 設 $2^{2x+1} + 2^{3x} = 5 \times 2^{x+4}$ ，則 $x =$ (A) $\frac{1}{2}$ (B) 2 (C) 3 (D) $\frac{1}{4}$

【龍騰自命題】

解答 C

解析 令 $2^x = k \Rightarrow 2k^2 + k^3 = 80k \Rightarrow k(k^2 + 2k - 80) = 0$

$$\Rightarrow k(k-8)(k+10) = 0$$

故 $k = -10, 0, 8$ (但 $-10, 0$ 不合)，即 $x = 3$

() 4. 解 $(\frac{3}{4})^{x+2} = (\frac{4}{3})^{2x-5}$ 得 x 之值為 (A) -1 (B) -2 (C) 2 (D) 1

【龍騰自命題】

解答 D

解析 $(\frac{3}{4})^{x+2} = (\frac{3}{4})^{5-2x} \quad \therefore x+2 = 5-2x, x=1$

() 5. 若 $a^{2x} = \sqrt{2} + 1$ ，求 $\frac{a^{3x} - a^{-3x}}{a^x - a^{-x}} =$ (A) $2\sqrt{2} + 1$ (B) $2\sqrt{2} - 1$ (C) 2 (D) $2\sqrt{2}$

【龍騰自命題】

解答 A

解析 $\frac{a^{3x} - a^{-3x}}{a^x - a^{-x}} = \frac{a^{4x} - a^{-2x}}{a^{2x} - 1} = \frac{(\sqrt{2}+1)^2 - \frac{1}{\sqrt{2}+1}}{(\sqrt{2}+1)-1} = \frac{3+2\sqrt{2}-\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}+1$

() 6. 方程式 $3^{2x} - 4 \times 3^x - 45 = 0$ 的解 $x =$ (A) 9 (B) -5 (C) 0 (D) 2

【龍騰自命題】

解答 D

解析 原式 $\Rightarrow (3^x)^2 - 4 \times 3^x - 45 = 0 \Rightarrow (3^x - 9)(3^x + 5) = 0$

$\therefore 3^x = 9$ 或 $3^x = -5$ (不合)，故 $x = 2$

() 7. 已知 $\log_4(\log_{0.2} x) = 0.5$ ，則 $x =$ (A) 0.04 (B) 0.03 (C) 0.02 (D) 0.01

解答 A

解析 $\log_4(\log_{0.2}x) = 0.5 \Rightarrow \log_{0.2}x = 4^{0.5} = 2 \quad \therefore x = (0.2)^2 = 0.04$

() 8. 設 $10 < x < 100$ ，且 $\log x$ 與 $\log \frac{1}{x}$ 尾數相同，則 $x =$ (A)10 (B) $3\sqrt{5}$ (C) $10\sqrt{10}$ (D) $5\sqrt{10}$

【龍騰自命題.】

解答 C

解析 $\log x - \log \frac{1}{x} = 2\log x$ 必為整數

$$10 < x < 100 \Rightarrow 1 < \log x < 2 \Rightarrow 2 < 2\log x < 4 \quad \therefore 2\log x = 3$$

$$\text{故 } x = 10^{\frac{3}{2}} = 10\sqrt{10}$$

() 9. 求 $\frac{\log_8 243}{\log_2 3} =$ (A) $\frac{3}{5}$ (B) $\frac{5}{3}$ (C) $\log_2 3$ (D)15

【龍騰自命題.】

解答 B

解析 所求 $= \frac{\log_{2^3} 3^5}{\log_2 3} = \frac{\frac{5}{3} \log_2 3}{\log_2 3} = \frac{5}{3}$

() 10. $a = \log_{0.2} 0.3$ ， $b = \log_2 3$ ， $c = \log_{20} 30$ ，比較 a 、 b 、 c 之大小 (A) $a > b > c$ (B) $c > a > b$ (C) $c > b > a$ (D) $b > c > a$

【龍騰自命題.】

解答 D

解析 $a = \frac{\log_{10} 0.3}{\log_{10} 0.2} = \frac{\log_{10} 3 - 1}{\log_{10} 2 - 1}$ ， $b = \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2}$ ， $c = \frac{\log_{10} 30}{\log_{10} 20} = \frac{\log_{10} 3 + 1}{\log_{10} 2 + 1}$

$$\therefore b - c = \frac{\log_{10} 3 - \log_{10} 2}{\log_{10} 2(\log_{10} 2 + 1)} > 0, \quad c - a = \frac{-2(\log_{10} 3 - \log_{10} 2)}{(\log_{10} 2 + 1)(\log_{10} 2 - 1)} > 0$$

$$\therefore b > c > a$$

() 11. 設 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ ，則 (A) $a < 1$ 則 $y = a^{-x}$ 為遞增函數 (B) $a > 1$ 則 $y = a^{-x}$ 為遞增函數 (C) $a < 1$ 則 $y = \log_a x$ 為遞增函數 (D) $a > 1$ 則 $y = \log_a x$ 為遞減函數

【龍騰自命題.】

解答 A

() 12. 若 $\frac{\sqrt{ab^3} \times \sqrt[3]{a^4b}}{a^{-2}b} = a^r \times b^s$ ，則 $r+s$ 的值为 (A) $\frac{23}{6}$ (B) $\frac{14}{3}$ (C) $\frac{14}{6}$ (D) $\frac{5}{6}$

【龍騰自命題.】

解答 B

解析 $\therefore \frac{\sqrt{ab^3} \times \sqrt[3]{a^4b}}{a^{-2}b} = \frac{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}} \times a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{1}{3}}}{a^{-2}b} = a^{\frac{1}{2} + \frac{4}{3} - (-2)} \times b^{\frac{3}{2} + \frac{1}{3} - 1} = a^{\frac{23}{6}} \times b^{\frac{5}{6}}$

$$\therefore r = \frac{23}{6}, \quad s = \frac{5}{6} \quad \text{因此 } r+s = \frac{28}{6} = \frac{14}{3}$$

() 13. 設 $\log_a \sqrt[3]{25} = \frac{2}{3}$ ， $\log_8 b = -\frac{1}{3}$ ， $\log_2 \frac{1}{16} = c$ ，則 $a+2b+3c$ 之值为 (A)-6 (B)-2 (C)2 (D)6

【龍騰自命題.】

解答 A

解析
$$\begin{cases} a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{25} \\ 8^{-\frac{1}{3}} = b \\ 2^c = \frac{1}{16} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = \frac{1}{2} \\ c = -4 \end{cases} \therefore a + 2b + 3c = 5 + 1 - 12 = -6$$

() 14. 設 x 為實數，且 $x \neq 0$ ，則 $(5x)^0 - (5x^0) =$ (A) -5 (B) -4 (C) 0 (D) 5

【龍騰自命題.】

解答 B

() 15. 試比較下列各數之大小： $a = \log_2 6$ ， $b = \log_4 25$ ， $c = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{7}$ (A) $c > b > a$ (B) $c > a > b$ (C) $b > a > c$ (D) $a > b > c$

【龍騰自命題.】

解答 B

解析 $a = \log_2 6 = \log_{2^2} 6^2 = \log_4 36$

$b = \log_4 25$

$c = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{7} = \log_{(\sqrt{2})^4} (\sqrt{7})^4 = \log_4 49$

\therefore 底數 $4 > 1$ 為遞增函數且 $49 > 36 > 25$

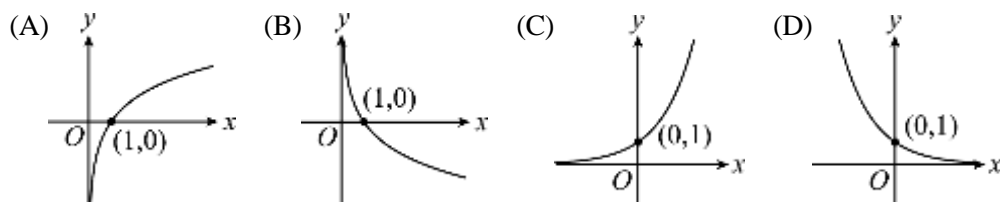
$\therefore \log_4 49 > \log_4 36 > \log_4 25$ 即 $c > a > b$

() 16. $(2 + \sqrt{3})^4 \times (2 - \sqrt{3})^4 =$ (A) $-8\sqrt{3}$ (B) $-2\sqrt{3}$ (C) $4 - 2\sqrt{3}$ (D) 1

【龍騰自命題.】

解答 D

() 17. 下列何者是 $y = \left(\frac{\pi}{4}\right)^x$ 的圖形？



【龍騰自命題.】

解答 D

() 18. 設 $a = \log_{\frac{1}{3}} 2$ ， $b = \log_{\frac{1}{9}} 5$ ， $c = \log_{\frac{1}{27}} 10$ ，試比較 a 、 b 、 c 之大小 (A) $c > b > a$ (B) $b > c > a$ (C) $a > b > c$ (D) $a > c > b$

【龍騰自命題.】

解答 D

解析 $a = \log_{\frac{1}{3}} 2 = \log_{\left(\frac{1}{3}\right)^6} 2^6 = \log_{\frac{1}{729}} 64$

$b = \log_{\frac{1}{9}} 5 = \log_{\left(\frac{1}{3}\right)^2} 5 = \log_{\left(\frac{1}{3}\right)^6} 5^3 = \log_{\frac{1}{729}} 125$

$c = \log_{\frac{1}{27}} 10 = \log_{\left(\frac{1}{3}\right)^3} 10 = \log_{\left(\frac{1}{3}\right)^6} 10^2 = \log_{\frac{1}{729}} 100$

$\therefore 64 < 100 < 125$ 且底數 $0 < \frac{1}{729} < 1$ 為遞減函數

$\therefore \log_{\frac{1}{729}} 64 > \log_{\frac{1}{729}} 100 > \log_{\frac{1}{729}} 125$ 即 $a > c > b$

() 19. 設 $a > 0$ ，若 $a + a^{-1} = 5$ ，則 $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} =$ (A) $\sqrt{10}$ (B) $\sqrt{7}$ (C) $\sqrt{6}$ (D) $\sqrt{3}$

【隨堂講義補充題.】

解答 B

解析 $\left(a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}\right)^2 = \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 + 2a^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{2}} + \left(a^{-\frac{1}{2}}\right)^2 = a + 2 + a^{-1} = 5 + 2 = 7$

$\Rightarrow a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{7}$ (負不合 $\because a > 0$)

$\Rightarrow a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{7}$

- () 20. 設 $a > 1$ ，則下列有關 $y = a^x$ 與 $y = a^{-x}$ 圖形的敘述，何者錯誤？ (A) 兩個圖形均在 x 軸上方 (B) 兩個圖形以 x 軸為對稱軸 (C) 兩個圖形的交點為 $(0, 1)$ (D) $y = a^x$ 為增函數

【龍騰自命題.】

解答 B

- () 21. 設 $\log(x-2) < 1$ ，則 x 的範圍為 (A) $x < 3$ (B) $x < 12$ (C) $x > 2$ (D) $2 < x < 12$

【龍騰自命題.】

解答 D

解析 $\log(x-2) < 1 = \log 10 \Rightarrow 0 < x-2 < 10 \Rightarrow 2 < x < 12$

- () 22. 設 x, y 為正實數，若 $2\log(x-2y) = \log x + \log y$ ，則 $\frac{x}{y}$ 之值為何？ (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

【098 年歷屆試題.】

解答 D

解析 $2\log(x-2y) = \log x + \log y$

$\Rightarrow \log(x-2y)^2 = \log xy \Rightarrow (x-2y)^2 = xy \Rightarrow x^2 - 5xy + 4y^2 = 0$

$\Rightarrow (x-y)(x-4y) = 0 \Rightarrow x = y$ 或 $x = 4y$

由題意知： x, y 為正實數

當 $x = y$ 時， $x - 2y = -y < 0$ (不合，真數恆正)

$\therefore x = 4y$ ，故 $\frac{x}{y} = \frac{4y}{y} = 4$

- () 23. 設 $a = \log_2 3$ ， $b = \log_3 2$ ，若以 a, b 表示 $\log_2 15$ ，則 $\log_2 15 =$ (A) $a - b - 1$ (B) $a + b - 1$ (C) $-a + b + 1$ (D) $a + b + 1$

【092 年歷屆試題.】

解答 C

解析 $\log_2 15 = \log_2 \frac{3 \times 10}{2} = \log_2 3 + \log_2 10 - \log_2 2 = b + 1 - a = -a + b + 1$

- () 24. 化簡 $2^{3+\log_4 36} - 3^{\log_9 25} =$ (A) 34 (B) 37 (C) 40 (D) 43

【隨堂講義補充題.】

解答 D

解析 $2^{3+\log_4 36} = 2^{3+\log_2 6^2} = 2^{\log_2 8 + \log_2 6^2} = 2^{\log_2 48} = 48$

$3^{\log_9 25} = 3^{\log_3 5^2} = 3^{\log_3 5^2} = 5$

\therefore 所求 $= 48 - 5 = 43$

- () 25. 已知 $\log x = -4.1405$ ，則 $\log x$ 的尾數為 (A) 0.1405 (B) 0.8595 (C) -0.1405 (D) -0.8595 【隨堂講義補充題.】

解答 B

解析 $\log x = -4.1405 = -5 + 0.8595$

$\Rightarrow \log x$ 的尾數為 0.8595