

一、單選題 (25 題 每題 4 分 共 100 分)

- () 1. 設 $i = \sqrt{-1}$ ，若級數 $\sum_{n=1}^{50} (i^3)^n = a + bi$ ，則 $a + 2b =$ (A) -1 (B) -3 (C) 1 (D) 3

【095 年歷屆試題】

解答 B

解析 $\sum_{n=1}^{50} (i^3)^n = \sum_{n=1}^{50} (-i)^n = (-i) + (-i)^2 + (-i)^3 + \cdots + (-i)^{50}$

$$= [(-i) + (-1) + i + 1] + [(-i) + (-1) + i + 1] + \cdots$$

$$+ [(-i) + (-1) + i + 1] + (-i) + (-1)$$

$$= 0 + 0 + \cdots + 0 - i - 1 = -1 - i = a + bi$$

即 $a = -1, b = -1$

$\therefore a + 2b = -3$

- () 2. 設 p, q 為二相異正整數，且 a_n 為一等差數列的第 n 項。若 $a_p = q, a_q = p$ ，則 $a_{p+q} =$ (A) 0 (B) p (C) q (D) $p + q$

【098 年歷屆試題】

解答 A

解析 a_n 為等差數列的第 n 項設首項 a_1 ，公差 d

$\therefore a_p = q \quad \therefore a_1 + (p-1)d = q \cdots \textcircled{1}$

$\therefore a_q = p \quad \therefore a_1 + (q-1)d = p \cdots \textcircled{2}$

由 $\textcircled{1} - \textcircled{2}$

$$(p-q)d = q-p \Rightarrow d = \frac{q-p}{p-q} = -1$$

 $d = -1$ 代回 $\textcircled{1}$

$$a_1 + (p-1)(-1) = q \Rightarrow a_1 = p + q - 1$$

因此

$$a_{p+q} = a_1 + (p+q-1)d = (p+q-1) + (p+q-1) \times (-1) = 0$$

- () 3. 求 102 到 2013 之間，個位數字為 7 的正整數共有幾個？ (A) 190 (B) 191 (C) 192 (D) 193

【102 年歷屆試題】

解答 B

解析 在 102 到 2013 之間，個位數字為 7 的正整數有 107, 117, 127, 137, ..., 2007

這些數字可以形成等差數列 $\langle a_n \rangle$ ，其中首項 $a_1 = 107$ ，公差 $d = 10$ ，第 n 項 $a_n = 2007$

$$\text{則 } 2007 = 107 + (n-1) \times 10 \Rightarrow n = 191$$

故個位數字為 7 的正整數共有 191 個

- () 4. 設一凸 n 邊形，各內角成等差數列，若公差為 4° ，最大內角為 172° ，則邊數為 (A) 12 (B) 15 (C) 18 (D) 20

【龍騰自命題】

解答 A

解析 外角度數分別為 $8^\circ, 12^\circ, 16^\circ, \dots$ ，又外角和 $8^\circ + 12^\circ + 16^\circ + \cdots = 360^\circ$

$$\Rightarrow \frac{2 \times 8^\circ + (n-1) \times 4^\circ}{2} \times n = 360^\circ \Rightarrow (n-12)(n+15) = 0 \Rightarrow n = 12$$

- () 5. 若一等比數列第 4 項為 56，第 7 項為 448，求此數列首項為 (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7

【龍騰自命題】

解答 D

解析 $\begin{cases} a_1 r^3 = 56 \\ a_1 r^6 = 448 \end{cases} \Rightarrow r = 2, a_1 = 7$

() 6. 已知等差數列 $\{a_n\}$ 中，首項為 -15 ，公差為 5 ，和為 735 ，則此數列的項數為 (A)14 (B)15 (C)21 (D)22

【隨堂講義補充題.】

解答 C

解析 $S_n = 735 \Rightarrow \frac{[2 \times (-15) + (n-1) \times 5] \times n}{2} = 735$
 $\Rightarrow (5n - 35)n = 2 \times 735 \Rightarrow n^2 - 7n - 294 = 0$
 $\Rightarrow n = 21$ 或 -14 (不合) $\Rightarrow n = 21$

() 7. 設一等比數列第 4 項為 2 ，第 7 項為 $\frac{1}{4}$ ，則公比為 (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{8}$ (C)1 (D) $\frac{1}{2}$

【龍騰自命題.】

解答 D

() 8. 已知一等差級數 $3+5+7+\dots+31$ 之和為 S 。試問 $S = ?$ (A) $\sum_{i=2}^{16}(2i-1)$ (B) $\sum_{i=1}^{16}(2i+1)$ (C) $3+\sum_{i=6}^{32}(i-1)$ (D) $\sum_{i=2}^{30}(i+1)$

【隨堂測驗.】

解答 A

解析 (B) $\sum_{i=1}^{16}(2i+1) = 3+5+7+\dots+33$

(C) $3 + \sum_{i=6}^{32}(i-1) = 3 + (5+6+7+\dots+31)$

(D) $\sum_{i=2}^{30}(i+1) = 3+4+5+\dots+31$

() 9. 若 $S_n = \sum_{i=1}^n a_i$ ，已知 $S_n = n^2 + 3n$ ，則 $a_{20} =$ (A)23 (B)46 (C)64 (D)42

【龍騰自命題.】

解答 D

解析 $a_{20} = S_{20} - S_{19} = 20^2 + 3 \times 20 - 19^2 - 3 \times 19 = 42$

() 10. 若在四正數 $6, x, y, 16$ 之中，前三數成等差，後三數成等比，則 $x+y =$ (A)21 (B)22 (C)23 (D)31

【龍騰自命題.】

解答 A

解析 \because 前三數成等差 $\therefore 2x = 6 + y$

\because 後三數成等比 $\therefore y^2 = 16x$

解 $\begin{cases} 2x = 6 + y \\ y^2 = 16x \end{cases} \Rightarrow y^2 = 8(6 + y) \Rightarrow y^2 - 8y - 48 = 0$

$\Rightarrow y = 12$ 或 -4 (不合)

$\therefore y = 12, x = 9$ ，故 $x+y = 12+9 = 21$

() 11. 設 $\{a_n\}$ 為等比數列，若 $a_1 + a_2 + a_3 = 3$ ，且 $a_4 + a_5 + a_6 = -24$ ，則 $a_8 =$ (A)256 (B)64 (C)-32 (D)-128

【隨堂講義補充題.】

解答 D

解析 $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 3 \\ a_4 + a_5 + a_6 = -24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + a_1 r + a_1 r^2 = 3 \\ a_1 r^3 + a_1 r^4 + a_1 r^5 = -24 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a_1(1+r+r^2) = 3 \dots \textcircled{1} \\ a_1 r^3(1+r+r^2) = -24 \dots \textcircled{2} \end{cases}$

$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \quad r^3 = -8 \Rightarrow r = -2$

代入 $\textcircled{1} \quad a_1 \times 3 = 3 \Rightarrow a_1 = 1$

$\therefore a_8 = a_1 r^7 = 1 \times (-2)^7 = -128$

()12.從 1 到 10 的自然數中,任取三個相異的數字,由小到大排列,最多能排出幾組不同的等比數列? (A)3 組 (B)4 組 (C)6 組 (D)7 組

【龍騰自命題.】

解答 B

解析 有 1、2、4；1、3、9；2、4、8；4、6、9 共四組

()13.設一等差數列首項為 5，公差為 7，和為 365，則此級數共有幾項? (A)10 (B)7 (C)9 (D)11

【龍騰自命題.】

解答 A

$$\text{解析 } 365 = \frac{2 \times 5 + (n-1) \times 7}{2} \times n$$

$$\Rightarrow 7n^2 + 3n - 730 = 0 \Rightarrow (n-10)(7n+73) = 0$$

$$\therefore n = 10 \text{ 或 } n = -\frac{73}{7} \text{ (不合)}$$

()14.已知 $\sum_{k=0}^4 (ak+b) = 25$ ， $\sum_{k=2}^5 (ak-b) = 24$ ，則 $a =$ (A)0 (B)1 (C)2 (D)3

【龍騰自命題.】

解答 C

$$\text{解析 } \begin{cases} 10a + 5b = 25 \\ 14a - 4b = 24 \end{cases} \Rightarrow a = 2, b = 1$$

()15.若兩等差數列第 n 項之比為 $(3n+1) : (7n-1)$ ，則兩數列前 7 項和之比為 (A)11 : 24 (B)13 : 27 (C)3 : 7 (D)4 : 9

【龍騰自命題.】

解答 B

$$\text{解析 } \because S_7 = 7a_4 \quad \therefore S_7 : S'_7 = 7a_4 : 7a'_4 = a_4 : a'_4 = 13 : 27$$

()16. $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots + \frac{1}{101 \times 102} =$ (A) $\frac{100}{101}$ (B) $\frac{101}{102}$ (C) $\frac{102}{101}$ (D) $\frac{101}{100}$

【隨堂講義補充題.】

解答 B

$$\text{解析 } \text{所求} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{101} - \frac{1}{102}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{102} = \frac{101}{102}$$

()17. $\{a_n\}$ 為等差數列，若 $a_6 = 5$ ， $a_{16} = 45$ ，則 $a_{26} =$ (A)75 (B)85 (C)95 (D)105

【龍騰自命題.】

解答 B

()18. $\sum_{k=1}^5 (2^k - 4k)$ 逐項展開的和為 (A)-2 (B)2 (C)12 (D)20

【龍騰自命題.】

解答 B

()19.等差數列 -13, -6, 1, 8, ... 的第 11 項為 (A)47 (B)57 (C)67 (D)77

【龍騰自命題.】

解答 B

()20. $\sum_{k=1}^8 \frac{81}{3^k}$ 之值 = (A) $30\frac{40}{81}$ (B) $40\frac{30}{81}$ (C) $30\frac{30}{81}$ (D) $40\frac{40}{27}$ (E) $40\frac{40}{81}$

【課本練習題-自我評量.】

解答 E

解析 將 $\sum_{k=1}^8 \frac{81}{3^k}$ 逐項展開直接相加

$$\sum_{k=1}^8 \frac{81}{3^k} = 27 + 9 + 3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} = 40 + \frac{27+9+3+1}{81} = 40\frac{40}{81}$$

() 21. 若 a, b, c, d 四正數成等比數列，且 $a+b=10, c+d=640$ ，則公比= (A)64 (B)8 (C) ± 8 (D)4 (E) ± 4

【課本練習題-自我評量.】

解答 B

解析 設公比為 r

$$\text{則 } b = ar, c = ar^2, d = ar^3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b = a+ar = 10 \cdots \textcircled{1} \\ c+d = ar^2 + ar^3 = 640 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\frac{\textcircled{2}}{\textcircled{1}} \text{ 得 } \frac{r^2(a+ar)}{a+ar} = \frac{640}{10} \Rightarrow r^2 = 64 \quad \therefore r = \pm 8$$

$\therefore a, b, c, d$ 為正數，故 $r=8$

() 22. 若一級數到第 n 項的和為 $S_n = 7n + 9$ ，則此級數的第 10 項為 (A)79 (B)70 (C)16 (D)9 (E)7

【課本練習題-自我評量.】

解答 E

$$\text{解析 } a_{10} = S_{10} - S_9 = (7 \times 10 + 9) - (7 \times 9 + 9) = 79 - 72 = 7$$

() 23. $\sum_{k=1}^{20} \frac{1}{k(k+1)} =$ (A) $\frac{19}{20}$ (B) $\frac{20}{21}$ (C) $\frac{21}{22}$ (D) $\frac{22}{23}$ (E) $\frac{23}{24}$

【課本練習題-自我評量.】

解答 B

$$\text{解析 } \frac{1}{k(k+1)} \text{ 改成部分分式為 } \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{k=1}^{20} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{20} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{20} - \frac{1}{21} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{21} = \frac{20}{21} \end{aligned}$$

() 24. 1 到 500 之間有兩個等差數列：2, 5, 8, 11, ... 與 1, 5, 9, 13, ... 同時出現在這兩個數列的數共有幾項？ (A)42 (B)39 (C)38 (D)36 (E)35

【課本練習題-自我評量.】

解答 A

解析 將已知的兩個等差數列多列前面幾項，以便觀察他們的共同項

2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, ...

1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, ...

觀察上述二等差數列，得知共同項為 5, 17, 29, 41, ...

$$\Rightarrow a_n = 5 + (n-1) \times 12 < 500 \Rightarrow 12n < 507 \Rightarrow n < 42\frac{1}{4}$$

$\therefore n = 42$

() 25. $\sum_{k=1}^{12} k^2 =$ (A)650 (B)750 (C)780 (D)800 (E)850

【課本練習題-自我評量.】

解答 A

$$\text{解析 } \sum_{k=1}^{12} k^2 = \frac{12(12+1)(2 \times 12 + 1)}{6} = \frac{12 \times 13 \times 25}{6} = 650$$