1225 數列級數　姓名　　　　　座號

一、單選題 (25 題 每題 4 分 共 100 分)

(　　) 1.設 $i=\sqrt{-1}$，若級數 $\sum_{n=1}^{50}(i^3)^n=a+bi$，則 $a+2b=$ (A)-1 (B)-3 (C)1 (D)3

【095 年歷屆試題.】

解答　B

解析　$\sum_{n=1}^{50}(i^3)^n=\sum_{n=1}^{50}(-i)^n=(-i)+(-i)^2+(-i)^3+\cdots+(-i)^{50}$

$=[(-i)+(-1)+i+1]+[(-i)+(-1)+i+1]+\cdots$

$+[(-i)+(-1)+i+1]+(-i)+(-1)$

$=0+0+\cdots+0-i-1=-1-i=a+bi$

即 $a=-1$，$b=-1$

$\therefore\ a+2b=-3$

(　　) 2.設 a、b、c、d 四正數成等比數列，若 $a+b=8$，$c+d=72$，則公比為 (A)2 (B)3 (C)4 (D)6

【龍騰自命題.】

解答　B

解析　設四數為 a, ar, ar^2, ar^3 $\Rightarrow\begin{cases}a+ar=8\\ar^2+ar^3=72\end{cases}$

$\dfrac{a(1+r)}{ar^2(1+r)}=\dfrac{8}{72}=\dfrac{1}{9}$　$\therefore\ r=\pm 3$（負不合）

(　　) 3.設 p、q 為二相異正整數，且 a_n 為一等差數列的第 n 項。若 $a_p=q$，$a_q=p$，則 $a_{p+q}=$ (A)0 (B)p (C)q (D)$p+q$

【098 年歷屆試題.】

解答　A

解析　a_n 為等差數列的第 n 項

設首項 a_1，公差 d

$\because\ a_p=q$　$\therefore\ a_1+(p-1)d=q\cdots$①

$\because\ a_q=p$　$\therefore\ a_1+(q-1)d=p\cdots$②

由① $-$ ②

$(p-q)d=q-p\ \Rightarrow\ d=\dfrac{q-p}{p-q}=-1$

$d=-1$ 代回①

$a_1+(p-1)(-1)=q\ \Rightarrow\ a_1=p+q-1$

因此

$a_{p+q}=a_1+(p+q-1)d=(p+q-1)+(p+q-1)\times(-1)=0$

(　　) 4.設一凸 n 邊形，各內角成等差數列，若公差為 4°，最大內角為 172°，則邊數為 (A)12 (B)15 (C)18 (D)20

【龍騰自命題.】

解答　A

解析　外角度數分別為 8°、12°、16°、⋯，又外角和 $8°+12°+16°+\cdots=360°$

$\Rightarrow\ \dfrac{2\times 8°+(n-1)\times 4°}{2}\times n=360°\ \Rightarrow\ (n-12)(n+15)=0\ \Rightarrow\ n=12$

(　　) 5.設一等比數列第 4 項為 2，第 7 項為 $\dfrac{1}{4}$，則公比為 (A)$\dfrac{1}{4}$ (B)$\dfrac{1}{8}$ (C)1 (D)$\dfrac{1}{2}$

【龍騰自命題.】

解答　D

(　　) 6.試求 2 與 -486 之間加入 4 個數成等比，求公比為 (A)± 3 (B)3 (C)-3 (D)2

【龍騰自命題.】

解答 C

解析 $-486=2r^5 \Rightarrow r^5=-243 \Rightarrow r=-3$

(　　) 7.求等差級數$(-7)+(-2)+3+\cdots\cdots+68$的總和為何？ (A) 420 (B) 427 (C) 486 (D) 488

【隨堂講義補充題.】

解答 D

解析 由題意知$a_1=-7$，$d=a_2-a_1=(-2)-(-7)=5$

$a_n=a_1+(n-1)d \Rightarrow 68=-7+(n-1)\times 5$

$\Rightarrow n=16$

則所求$=(-7)+(-2)+3+\cdots\cdots+68=\dfrac{[(-7)+68]\times 16}{2}=61\times 8=488$

(　　) 8.設兩整數a，b的等差中項為 5，等比中項為 4，則$a^2+b^2=$ (A)38 (B)58 (C)68 (D)78

【隨堂測驗.】

解答 C

解析 $\begin{cases}\dfrac{a+b}{2}=5\cdots\cdots① \\ ab=4^2\cdots\cdots②\end{cases}$

由①得$a=10-b$

代入②得$(10-b)\times b=16$

$\Rightarrow b^2-10b+16=0 \Rightarrow (b-8)(b-2)=0$

$\therefore b=8$或 2

當$b=8$時，$a=2$；當$b=2$時，$a=8$

故$a^2+b^2=8^2+2^2=64+4=68$

(　　) 9.若$S_n=\sum_{i=1}^{n}a_i$，已知$S_n=n^2+3n$，則$a_{20}=$ (A)23 (B)46 (C)64 (D)42

【龍騰自命題.】

解答 D

解析 $a_{20}=S_{20}-S_{19}=20^2+3\times 20-19^2-3\times 19=42$

(　　) 10.設三數成等比數列，其和為 63，其乘積為 1728，其公比大於 1，則公比為 (A)3 (B)7 (C)9 (D)4

【龍騰自命題.】

解答 D

解析 設三數為$\dfrac{x}{r}$，x，xr

$\because$ 其乘積為 1728 $\therefore$ $x^3=1728$，得$x=12$

$\because$ 其和為 63 $\therefore$ $\dfrac{x}{r}+x+xr=63$

$\Rightarrow \dfrac{12}{r}+12+12r=63 \Rightarrow 4r^2-17r+4=0 \Rightarrow r=4$或$\dfrac{1}{4}$（不合）

(　　) 11.已知一等差級數前n項和為$5n^2$，求公差為 (A)10 (B)15 (C)5 (D)20

【龍騰自命題.】

解答 A

解析 $S_n=5n^2$

$a_1=S_1=5$

$a_1+a_2=S_2=5\times 2^2=20$

$\therefore$ $a_2=20-5=15$，公差$d=a_2-a_1=10$

(　　) 12.已知等比數列首項為-4，且$a_8=32\sqrt{2}$，求此數列之公比$r=$ (A)$-\sqrt{2}$ (B)$\sqrt{2}$ (C)$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (D)$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

【隨堂講義補充題.】

解答 A

解析 ∵ $a_1=-4$，$a_8=32\sqrt{2}$

由 $a_n=a_1r^{n-1}$ $\Rightarrow$ $a_8=a_1r^7$

$\Rightarrow$ $32\sqrt{2}=-4\times r^7$ $\Rightarrow$ $r^7=-8\sqrt{2}=\left(-\sqrt{2}\right)^7$

∴ $r=-\sqrt{2}$

( ) 13.已知 $\sum_{k=0}^{4}(ak+b)=25$，$\sum_{k=2}^{5}(ak-b)=24$，則 $a=$ (A)0 (B)1 (C)2 (D)3

【龍騰自命題.】

解答 C

解析 $\begin{cases}10a+5b=25\\14a-4b=24\end{cases}$ $\Rightarrow$ $a=2$，$b=1$

( ) 14.已知等比數列第 4 項為 45，第 7 項為 $-\frac{5}{3}$，則下列何者為非？ (A)首項 $a_1=-1215$ (B)公比 $r=-\frac{1}{3}$ (C)第 10 項 $a_{10}=-\frac{5}{81}$

(D) $\frac{5}{729}$ 為此數列的第 12 項

【隨堂講義補充題.】

解答 C

解析 由 $a_n=a_1r^{n-1}$ 知 $\begin{cases}a_4=a_1r^3=45\cdots\cdots①\\a_7=a_1r^6=-\frac{5}{3}\cdots\cdots②\end{cases}$

由 $\frac{②}{①}$ 得 $r^3=-\frac{1}{27}$ $\Rightarrow$ $r=-\frac{1}{3}$

代入①式得 $a_1=-1215$

則 $a_{10}=a_7r^3=\left(-\frac{5}{3}\right)\times\left(-\frac{1}{27}\right)=\frac{5}{81}$

$a_{12}=a_{10}r^2=\frac{5}{81}\times\left(-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{5}{729}$

( ) 15.若 $1+2+4+8+\cdots+2^n>1000$，則 n 之最小整數值為 (A)8 (B)9 (C)10 (D)11

【龍騰自命題.】

解答 B

解析 $1+2+4+8+\cdots+2^n=\frac{2^{n+1}-1}{2-1}>1000$

$\Rightarrow$ $2^{n+1}>1001$ $\Rightarrow$ $n+1$ 最小整數值為 10 $\Rightarrow$ n 最小整數值為 9

( ) 16. $S_n=\sum_{i=1}^{n}a_i$，若 $S_n=n^2+3n$，則 $a_n=$ (A)$2n-2$ (B)$2n-1$ (C)$2n+2$ (D)$2n+4$

【龍騰自命題.】

解答 C

解析 $a_n=S_n-S_{n-1}=n^2+3n-(n-1)^2-3(n-1)=2n+2$

( ) 17.設一等比數列之公比為 r，若其前 n 項和為 S_n，已知 $S_{10}=5$，$S_{20}=15$，則 $S_{40}=$ (A)75 (B)20 (C)30 (D)25

【龍騰自命題.】

解答 A

解析 ∵ $S_{10}=\frac{a(r^{10}-1)}{r-1}=5$，$S_{20}=\frac{a(r^{20}-1)}{r-1}=15$

$\therefore \dfrac{r^{20}-1}{r^{10}-1}=3 \quad \Rightarrow \quad r^{10}+1=3 \quad \Rightarrow \quad r^{10}=2$

$\because \dfrac{a}{r-1}=5 \qquad \therefore S_{40}=\dfrac{a(r^{40}-1)}{r-1}=5\times(2^4-1)=75$

(　　)18.求級數$\sum_{k=3}^{20}(k-15)$的和為　(A) – 90　(B) – 63　(C) – 60　(D) – 75

【龍騰自命題.】

解答　B

解析　$\sum_{k=3}^{20}(k-15)=\dfrac{18\times 23}{2}-15\times 18=-63$

(　　)19.設 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$，則$\sum_{n=2}^{10}f(n)$的值為　(A)$\dfrac{10}{11}$　(B)$\dfrac{36}{55}$　(C)$\dfrac{72}{55}$　(D)全部皆非

【龍騰自命題.】

解答　B

解析　$f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1})$

故$\sum_{n=2}^{10}f(n)=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}+\cdots+\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{11})$

$=\dfrac{1}{2}(1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{10}-\dfrac{1}{11})=\dfrac{36}{55}$

(　　)20.若兩等差數列第 n 項之比為$(3n+1)$：$(7n-1)$，則兩數列前 7 項和之比為　(A)11：24　(B)13：27　(C)3：7　(D)4：9

【龍騰自命題.】

解答　B

解析　$\because$ $S_7=7a_4$　　$\therefore$ S_7：$S'_7=7a_4$：$7a'_4=a_4$：$a'_4=13$：27

(　　)21.若兩等差級數，前 n 項和之比為$(3n+1)$：$(7n-1)$，則兩數列第 7 項之比為　(A)11：24　(B)13：27　(C)3：7　(D)4：9

【龍騰自命題.】

解答　D

解析　$\because$ a_7：$b_7=13a_7$：$13b_7=S_{13}$：$S'_{13}=[3(13)+1]$：$[7(13)-1]=4$：9

(　　)22.在$\dfrac{1}{4}$和$\dfrac{4}{81}$之間插入 3 個正數，使這 5 個數成等比數列，則插入的第三數為　(A)$\dfrac{1}{6}$　(B)$\dfrac{1}{9}$　(C)$\dfrac{2}{16}$　(D)$\dfrac{2}{27}$

【龍騰自命題.】

解答　D

解析　$a_1=\dfrac{1}{4}$，$a_5=\dfrac{4}{81} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{4}{81}=\dfrac{1}{4}r^4 \quad \Rightarrow \quad r=\pm\dfrac{2}{3}$（負不合）

插入的第三數為$a_4=a_1r^3=\dfrac{1}{4}\times(\dfrac{2}{3})^3=\dfrac{2}{27}$

(　　)23.$\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2=$　(A)$\dfrac{2n^3-3n^2+n}{6}$　(B)$\dfrac{2n^3+3n-n}{6}$　(C)$\dfrac{2n^3-3n^2-n}{6}$　(D)$\dfrac{2n^3+3n+n}{6}$

【龍騰自命題.】

解答　A

解析　〈法一〉

$$\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2=0^2+1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2=\sum_{k=1}^{n-1}k^2=\frac{1}{6}(n-1)(n)[2(n-1)+1]$$

$$=\frac{2n^3-3n^2+n}{6}$$

〈法二〉

$\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2=\sum_{k=1}^{n}(k^2-2k+1)=\sum_{k=1}^{n}k^2-2\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$

$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-2\times\frac{n(n+1)}{2}+n=\frac{2n^3-3n^2+n}{6}$

(　　　) 24.已知四個正數a、b、c、d為一等比數列，若$a+b=20$，$a+b+c+d=65$，則$a=$　(A)5　(B)6　(C)7　(D)8

【104 年歷屆試題.】

解答　D

解析　設等比數列的公比為r（$r>0$）

則$b=ar$，$c=ar^2$，$d=ar^3$

$a+b=20 \Rightarrow a+ar=20$

$\Rightarrow a(1+r)=20 \cdots\cdots ①$

$a+b+c+d=65 \Rightarrow 20+c+d=65$

$\Rightarrow c+d=45$

$\Rightarrow ar^2+ar^3=45$

$\Rightarrow ar^2(1+r)=45 \cdots\cdots ②$

$\frac{②}{①}$：$\frac{ar^2(1+r)}{a(1+r)}=\frac{45}{20} \Rightarrow r^2=\frac{9}{4}$

$\Rightarrow r=\pm\frac{3}{2}$（負不合）

$r=\frac{3}{2}$代回①：$a(1+\frac{3}{2})=20 \Rightarrow a=8$

(　　　) 25.設a、b、c三數成等比數列，且滿足$a+b+c=9$及$a^2+b^2+c^2=189$，則等比中項$b=$　(A)-6　(B)-2　(C)$\frac{1}{2}$　(D)6

【106 年歷屆試題.】

解答　A

解析　〈法一〉

$\because$ a、b、c成等比數列

$\therefore$ $b^2=ac$

$a^2+b^2+c^2=189 \Rightarrow a^2+c^2=189-b^2$

$a+b+c=9 \Rightarrow a+c=9-b \Rightarrow (a+c)^2=(9-b)^2$

$\Rightarrow a^2+2ac+c^2=81-18b+b^2 \Rightarrow (a^2+c^2)+2ac=81-18b+b^2$

$\Rightarrow (189-b^2)+2b^2=81-18b+b^2 \Rightarrow 18b=-108 \Rightarrow b=-6$

〈法二〉

設等比數列a、b、c的公比為r

則$b=ar$，$c=ar^2$

$a+b+c=9$

$\Rightarrow a+ar+ar^2=9 \cdots\cdots ①$

$\Rightarrow a(1+r+r^2)=9 \cdots\cdots ②$

$a^2+b^2+c^2=189$

$\Rightarrow a^2+(ar)^2+(ar^2)^2=189 \Rightarrow a^2+a^2r^2+a^2r^4=189$

$\Rightarrow a^2(1+r^2+r^4)=189 \cdots\cdots ③$

$\frac{③}{②}$: $\frac{a^2\left(1+r^2+r^4\right)}{a\left(1+r+r^2\right)}=\frac{189}{9}$

$\Rightarrow$ $\frac{a^2\left(1+r+r^2\right)\left(1-r+r^2\right)}{a\left(1+r+r^2\right)}=21$ $\Rightarrow$ $a\left(1-r+r^2\right)=21$

$\Rightarrow$ $a-ar+ar^2=21\cdots\cdots④$

①−④ : $2ar=-12$ $\Rightarrow$ $ar=-6$

$\because$ $b=ar$ $\therefore$ $b=-6$