

一、單選題 (25 題 每題 4 分 共 100 分)

- () 1. 設 $i = \sqrt{-1}$ ，若級數 $\sum_{n=1}^{50} (i^3)^n = a + bi$ ，則 $a + 2b =$ (A) -1 (B) -3 (C) 1 (D) 3

【095 年歷屆試題】

解答 B

解析 $\sum_{n=1}^{50} (i^3)^n = \sum_{n=1}^{50} (-i)^n = (-i) + (-i)^2 + (-i)^3 + \cdots + (-i)^{50}$

$$= [(-i) + (-1) + i + 1] + [(-i) + (-1) + i + 1] + \cdots$$

$$+ [(-i) + (-1) + i + 1] + (-i) + (-1)$$

$$= 0 + 0 + \cdots + 0 - i - 1 = -1 - i = a + bi$$

即 $a = -1, b = -1$

$\therefore a + 2b = -3$

- () 2. 設 p, q 為二相異正整數，且 a_n 為一等差數列的第 n 項。若 $a_p = q, a_q = p$ ，則 $a_{p+q} =$ (A) 0 (B) p (C) q (D) $p + q$

【098 年歷屆試題】

解答 A

解析 a_n 為等差數列的第 n 項設首項 a_1 ，公差 d

$\therefore a_p = q \quad \therefore a_1 + (p-1)d = q \cdots \textcircled{1}$

$\therefore a_q = p \quad \therefore a_1 + (q-1)d = p \cdots \textcircled{2}$

由 $\textcircled{1} - \textcircled{2}$

$$(p-q)d = q-p \Rightarrow d = \frac{q-p}{p-q} = -1$$

 $d = -1$ 代回 $\textcircled{1}$

$$a_1 + (p-1)(-1) = q \Rightarrow a_1 = p + q - 1$$

因此

$$a_{p+q} = a_1 + (p+q-1)d = (p+q-1) + (p+q-1) \times (-1) = 0$$

- () 3. 求 102 到 2013 之間，個位數字為 7 的正整數共有幾個？ (A) 190 (B) 191 (C) 192 (D) 193

【102 年歷屆試題】

解答 B

解析 在 102 到 2013 之間，個位數字為 7 的正整數有 107, 117, 127, 137, ..., 2007

這些數字可以形成等差數列 $\langle a_n \rangle$ ，其中首項 $a_1 = 107$ ，公差 $d = 10$ ，第 n 項 $a_n = 2007$

$$\text{則 } 2007 = 107 + (n-1) \times 10 \Rightarrow n = 191$$

故個位數字為 7 的正整數共有 191 個

- () 4. 已知等差數列：7, 2, -3, -8, ...，若首項為 a_1 ，公差為 d ，則 $3a_1 + 4d = ?$ (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

【隨堂測驗】

解答 A

解析 首項 $a_1 = 7$ ，公差 $d = 2 - 7 = -5$

$$\text{則 } 3a_1 + 4d = 3 \times 7 + 4 \times (-5) = 1$$

- () 5. 下列各數列，何者不是等比數列？ (A) 3, -3, 3, -3 (B) 5, 25, 125, 625 (C) $2^2, 4^2, 8^2, 16^2$ (D) $3^2, 6^2, 9^2, 12^2$

【隨堂測驗】

解答 D

解析 (A) 公比為 -1 (B) 公比為 5 (C) 公比為 4

(D) 後項與前項的比值並不一致

- () 6. 若 $a, 5, b, c, d, -3$ 成等差，則公差為 (A) -1 (B) -4 (C) -2 (D) 2

【龍騰自命題】

解答 C

解析 公差 = $\frac{-3-5}{4} = -2$

() 7. 求 1 至 153 之間，所有 4 的倍數總和為 (A)798 (B)2964 (C)2980 (D)3012

【龍騰自命題.】

解答 B

解析 所求 = $4 \times 1 + 4 \times 2 + \dots + 4 \times 38 = 4(1 + 2 + 3 + \dots + 38) = 2964$

() 8. 設一等比數列第 4 項為 2，第 7 項為 $\frac{1}{4}$ ，則公比為 (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{8}$ (C)1 (D) $\frac{1}{2}$

【龍騰自命題.】

解答 D

() 9. 若 $S_n = \sum_{i=1}^n a_i$ ，已知 $S_n = n^2 + 3n$ ，則 $a_{20} =$ (A)23 (B)46 (C)64 (D)42

【龍騰自命題.】

解答 D

解析 $a_{20} = S_{20} - S_{19} = 20^2 + 3 \times 20 - 19^2 - 3 \times 19 = 42$

() 10. 在 5 與 320 之間加入 5 個正數，使之成為等比數列，則其公比為何？ (A)5 (B)4 (C)3 (D)2

【隨堂測驗.】

解答 D

解析 設公比為 r ，由題意知首項為 5，第 7 項為 320，

則 $5 \times r^{7-1} = 320 \Rightarrow r^6 = 64 \Rightarrow r = \pm 2$

(負不合， \therefore 均為正數)

故公比為 2

() 11. 從 1 到 10 的自然數中，任取三個相異的數字，由小到大排列，最多能排出幾組不同的等比數列？ (A)3 組 (B)4 組 (C)6 組 (D)7 組

【龍騰自命題.】

解答 B

解析 有 1、2、4；1、3、9；2、4、8；4、6、9 共四組

() 12. 若 $1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^n > 1000$ ，則 n 之最小整數值為 (A)8 (B)9 (C)10 (D)11

【龍騰自命題.】

解答 B

解析 $1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^n = \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} > 1000$

$\Rightarrow 2^{n+1} > 1001 \Rightarrow n + 1$ 最小整數值為 10 $\Rightarrow n$ 最小整數值為 9

() 13. 問 $\sum_{k=2}^{11} 2^k$ 的和為 (A)508 (B)1020 (C)2044 (D)4092

【龍騰自命題.】

解答 D

解析 $\sum_{k=2}^{11} 2^k = 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{11} = \frac{2^2(2^{10} - 1)}{2 - 1} = 2^{12} - 4 = 4096 - 4 = 4092$

() 14. 設一等比數列之公比為 r ，若其前 n 項和為 S_n ，已知 $S_{10} = 5$ ， $S_{20} = 15$ ，則 $S_{40} =$ (A)75 (B)20 (C)30 (D)25

【龍騰自命題.】

解答 A

解析 $\therefore S_{10} = \frac{a(r^{10} - 1)}{r - 1} = 5$ ， $S_{20} = \frac{a(r^{20} - 1)}{r - 1} = 15$

$$\therefore \frac{r^{20}-1}{r^{10}-1}=3 \Rightarrow r^{10}+1=3 \Rightarrow r^{10}=2$$

$$\therefore \frac{a}{r-1}=5 \quad \therefore S_{40}=\frac{a(r^{40}-1)}{r-1}=5 \times (2^4-1)=75$$

() 15. 設一等差數列之第 5 項為 19，第 9 項為 35，則前 10 項之和為 (A)210 (B)310 (C)410 (D)510

【龍騰自命題.】

解答 A

() 16. 問級數 $\sum_{k=1}^5 (2k-3)$ 的和為 (A)15 (B)17 (C)13 (D)19

【龍騰自命題.】

解答 A

解析 $\sum_{k=1}^5 (2k-3) = (-1)+1+3+5+7=15$

() 17. 若兩等差級數，前 n 項和之比為 $(3n+1):(7n-1)$ ，則兩數列第 7 項之比為 (A)11:24 (B)13:27 (C)3:7 (D)4:9

【龍騰自命題.】

解答 D

解析 $\therefore a_7 : b_7 = 13a_7 : 13b_7 = S_{13} : S'_{13} = [3(13)+1] : [7(13)-1] = 4 : 9$

() 18. 在 $\frac{1}{4}$ 和 $\frac{4}{81}$ 之間插入 3 個正數，使這 5 個數成等比數列，則此等比數列的公比為 (A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{3}{4}$ (C) $\frac{3}{2}$ (D) $\frac{4}{3}$

【龍騰自命題.】

解答 A

解析 $a_1 = \frac{1}{4}, a_5 = \frac{4}{81} \Rightarrow \frac{4}{81} = \frac{1}{4}r^4 \Rightarrow r = \pm \frac{2}{3}$ (負不合)

() 19. 在 $\frac{1}{4}$ 和 $\frac{4}{81}$ 之間插入 3 個正數，使這 5 個數成等比數列，則插入的第三數為 (A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{9}$ (C) $\frac{2}{16}$ (D) $\frac{2}{27}$

【龍騰自命題.】

解答 D

解析 $a_1 = \frac{1}{4}, a_5 = \frac{4}{81} \Rightarrow \frac{4}{81} = \frac{1}{4}r^4 \Rightarrow r = \pm \frac{2}{3}$ (負不合)

插入的第三數為 $a_4 = a_1 r^3 = \frac{1}{4} \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{27}$

() 20. 設 $\sum_{k=1}^{10} a_k = 7$ ， $\sum_{k=1}^{10} b_k = 13$ ，則 $\sum_{k=1}^{10} (5a_k + 3b_k - 4) =$ (A)34 (B)39 (C)44 (D)49

【龍騰自命題.】

解答 A

() 21. 一等差數列第 3 項是 -18，第 12 項是 9，此等差數列自第幾項開始為正數？ (A)9 (B)10 (C)11 (D)12

【龍騰自命題.】

解答 B

() 22. 1 到 300 之間 13 的倍數有幾個？ (A)23 (B)24 (C)25 (D)26

【龍騰自命題.】

解答 A

解析 設有 n 個 13 的倍數

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow 299 = 13 + (n-1) \times 13 \Rightarrow n = 23$$

() 23. 一等差數列第 4 項是 51，第 9 項是 31，則此數列第幾項是 -53？ (A)26 (B)29 (C)30 (D)33

【龍騰自命題.】

解答 C

() 24.一等差數列第4項是51，第9項是31，則此數列自第幾項開始為負數？ (A)16 (B)17 (C)18 (D)19

【龍騰自命題.】

解答 B

() 25.設 a 、 b 、 c 三數成等比數列，且滿足 $a+b+c=9$ 及 $a^2+b^2+c^2=189$ ，則等比中項 $b=$ (A)-6 (B)-2 (C) $\frac{1}{2}$ (D)6

【106年歷屆試題.】

解答 A

解析 〈法一〉

∵ a 、 b 、 c 成等比數列

$$\therefore b^2 = ac$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 189 \Rightarrow a^2 + c^2 = 189 - b^2$$

$$a + b + c = 9 \Rightarrow a + c = 9 - b \Rightarrow (a + c)^2 = (9 - b)^2$$

$$\Rightarrow a^2 + 2ac + c^2 = 81 - 18b + b^2 \Rightarrow \underbrace{(a^2 + c^2)} + 2 \underbrace{ac} = 81 - 18b + b^2$$

$$\Rightarrow \underbrace{(189 - b^2)} + 2 \underbrace{b^2} = 81 - 18b + b^2 \Rightarrow 18b = -108 \Rightarrow b = -6$$

〈法二〉

設等比數列 a 、 b 、 c 的公比為 r

則 $b = ar$ ， $c = ar^2$

$$a + b + c = 9$$

$$\Rightarrow a + ar + ar^2 = 9 \dots\dots ①$$

$$\Rightarrow a(1 + r + r^2) = 9 \dots\dots ②$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 189$$

$$\Rightarrow a^2 + (ar)^2 + (ar^2)^2 = 189 \Rightarrow a^2 + a^2r^2 + a^2r^4 = 189$$

$$\Rightarrow a^2(1 + r^2 + r^4) = 189 \dots\dots ③$$

$$\frac{③}{②} : \frac{a^2(1 + r^2 + r^4)}{a(1 + r + r^2)} = \frac{189}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{a^2(1 + r + r^2)(1 - r + r^2)}{a(1 + r + r^2)} = 21 \Rightarrow a(1 - r + r^2) = 21$$

$$\Rightarrow a - ar + ar^2 = 21 \dots\dots ④$$

$$① - ④ : 2ar = -12 \Rightarrow ar = -6$$

$$\therefore b = ar \quad \therefore b = -6$$