

一、單選題 (25 題 每題 4 分 共 100 分)

() 1. 有一數列 $\langle a_n \rangle$: $-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots$, 即

$$a_n = (-1)^n \frac{1}{n+1}, \text{ 另一數列 } \langle b_n \rangle : 1, \frac{\sqrt{2}}{4},$$

$$\frac{\sqrt{3}}{9}, \dots, \text{ 即 } b_n = \frac{\sqrt{n}}{n^2}, \text{ 則 } a_5 + b_4 \text{ 等於 } (A) \frac{13}{40}$$

$$(B) -\frac{3}{40} \quad (C) \frac{7}{24} \quad (D) -\frac{1}{24}$$

【隨堂講義補充題。】

解答 D

解析 $a_n = (-1)^n \frac{1}{n+1} \Rightarrow a_5 = (-1)^5 \times \frac{1}{5+1} = -\frac{1}{6}$

$$b_n = \frac{\sqrt{n}}{n^2} \Rightarrow b_4 = \frac{\sqrt{4}}{4^2} = \frac{1}{8}$$

$$\text{故 } a_5 + b_4 = \left(-\frac{1}{6}\right) + \frac{1}{8} = -\frac{1}{24}$$

() 2. 設 p, q 為二相異正整數, 且 a_n 為一等差數列的第 n 項。若 $a_p = q, a_q = p$, 則 $a_{p+q} =$ (A) 0 (B) p (C) q (D) $p+q$

【098 年歷屆試題。】

解答 A

解析 a_n 為等差數列的第 n 項

設首項 a_1 , 公差 d

$$\because a_p = q \quad \therefore a_1 + (p-1)d = q \cdots$$

①

$$\because a_q = p \quad \therefore a_1 + (q-1)d = p \cdots$$

②

由① - ②

$$(p-q)d = q-p \Rightarrow d = \frac{q-p}{p-q} = -1$$

$d = -1$ 代回①

$$a_1 + (p-1)(-1) = q \Rightarrow a_1 = p+q-1$$

因此

$$a_{p+q} = a_1 + (p+q-1)d = (p+q-1) + (p+q-1) \times (-1) = 0$$

() 3. 設 a, b, c, d 四正數成等比數列, 若 $a+b=8, c+d=72$, 則公比為 (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 6

【龍騰自命題。】

解答 B

解析 設四數為 $a, ar, ar^2, ar^3 \Rightarrow$

$$\begin{cases} a+ar=8 \\ ar^2+ar^3=72 \end{cases}$$

$$\frac{a(1+r)}{ar^2(1+r)} = \frac{8}{72} = \frac{1}{9} \quad \therefore r = \pm 3 \text{ (負不合)}$$

() 4. 求 $\sum_{k=3}^9 (-2) + \sum_{k=1}^9 (-1)^k =$ (A) -13 (B) -14

(C) -15 (D) -21

【隨堂講義補充題。】

解答 C

解析 $\sum_{k=3}^9 (-2) + \sum_{k=1}^9 (-1)^k$

$$= (9-3+1) \times (-2) + (-1) + 1 + (-1) + 1 + \dots$$

$$+ (-1) + 1 + (-1)$$

$$= -14 - 1 = -15$$

() 5. 設一凸 n 邊形, 各內角成等差數列, 若公差為 4° , 最大內角為 172° , 則邊數為

(A) 12 (B) 15 (C) 18 (D) 20

【龍騰自命題。】

解答 A

解析 外角度數分別為 $8^\circ, 12^\circ, 16^\circ, \dots$, 又外角和 $8^\circ + 12^\circ + 16^\circ + \dots = 360^\circ$

$$\Rightarrow \frac{2 \times 8^\circ + (n-1) \times 4^\circ}{2} \times n = 360^\circ \Rightarrow (n-$$

$$12)(n+15) = 0 \Rightarrow n = 12$$

() 6. 求 $\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \dots + \frac{1}{25 \times 27} =$ (A) $\frac{24}{25}$

(B) $\frac{25}{26}$ (C) $\frac{24}{51}$ (D) $\frac{13}{27}$

【隨堂講義補充題。】

解答 D

解析 原式

$$= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \dots$$

$$+ \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{25} - \frac{1}{27}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \times \left[\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \dots + \left(\frac{1}{25} - \frac{1}{27}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2} \times \left[1 - \frac{1}{27}\right] = \frac{1}{2} \times \frac{26}{27} = \frac{13}{27}$$

() 7. 設一等差數列的第 3 項為 6, 第 6 項為 27, 則其第 10 項等於 (A) 48 (B) 55

(C) 62 (D) 69

【龍騰自命題。】

解答 B

解析 $\begin{cases} a_1 + 2d = 6 \\ a_1 + 5d = 27 \end{cases} \Rightarrow d = 7, a_1 = -8$ 故所

求 $= -8 + 63 = 55$

- () 8. 有一等比數列的首項為 5，公比 $= -2$ ，則其第 5 項為 (A) -10 (B) -40 (C) 80 (D) -160

【隨堂測驗.】

解答 C

解析 $a_1 = 5, r = -2$

$a_5 = a_1 \times r^{5-1} = 5 \times (-2)^4 = 5 \times 16 = 80$

- () 9. 於 5 與 93 之間插入 7 個數，使成等差數列，則插入 7 個數之和為 (A) 336 (B) 343 (C) 350 (D) 357

【龍騰自命題.】

解答 B

解析 〈法一〉

公差 $d = \frac{93-5}{9-1} = 11$

這七個數為 16, 27, ..., 82, 則和為

$\frac{82+16}{2} \times 7 = 343$

〈法二〉

$\frac{(5+93)}{2} \times 9 - (5+93) = 343$

- () 10. 若一等差數列第 5 項為 32，第 9 項為 20，則此數列第幾項開始為負數？ (A) 16 (B) 15 (C) 14 (D) 13

【隨堂講義補充題.】

解答 A

解析 $\begin{cases} a_5 = a_1 + 4d = 32 \cdots \cdots \textcircled{1} \\ a_9 = a_1 + 8d = 20 \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$

由①②解得 $d = -3, a_1 = 44$

設第 n 項開始為負數，即 $a_n < 0$

$\Rightarrow a_1 + (n-1)d < 0 \Rightarrow 44 + (n-1) \times (-3) < 0$

$\Rightarrow -3n + 47 < 0 \Rightarrow 3n > 47 \Rightarrow n > \frac{47}{3} \doteq 15.7$

故取 $n = 16$

- () 11. 在 24 與 -8 之間插入 11 個數，使這 13 個數成為等差數列，試求插入的第幾項為 0？ (A) 7 (B) 9 (C) 10 (D) 11

【隨堂測驗.】

解答 B

解析 $a_1 = 24, a_{13} = -8$

$a_{13} = a_1 + (13-1)d$

$\Rightarrow -8 = 24 + 12d \Rightarrow d = -\frac{8}{3}$

則 $a_k = a_1 + (k-1)d = 0$

$\Rightarrow 24 + (k-1) \left(-\frac{8}{3}\right) = 0 \Rightarrow k = 10$ (第 10 項為 0)

故插入的第 9 項為 0

- () 12. 設兩整數 a, b 的等差中項為 5，等比中項為 4，則 $a^2 + b^2 =$ (A) 38 (B) 58 (C) 68 (D) 78

【隨堂測驗.】

解答 C

解析 $\begin{cases} \frac{a+b}{2} = 5 \cdots \cdots \textcircled{1} \\ ab = 4^2 \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$

由①得 $a = 10 - b$

代入②得 $(10-b) \times b = 16$

$\Rightarrow b^2 - 10b + 16 = 0 \Rightarrow (b-8)(b-2) = 0$

$\therefore b = 8$ 或 2

當 $b = 8$ 時， $a = 2$ ；當 $b = 2$ 時， $a = 8$

故 $a^2 + b^2 = 8^2 + 2^2 = 64 + 4 = 68$

- () 13. 設三數成等比數列，其和為 63，其乘積為 1728，其公比大於 1，則公比為 (A) 3 (B) 7 (C) 9 (D) 4

【龍騰自命題.】

解答 D

解析 設三數為 $\frac{x}{r}, x, xr$

\therefore 其乘積為 1728 $\therefore x^3 = 1728$ ，得 $x = 12$

\therefore 其和為 63 $\therefore \frac{x}{r} + x + xr = 63$

$\Rightarrow \frac{12}{r} + 12 + 12r = 63 \Rightarrow 4r^2 - 17r + 4 = 0$

$\Rightarrow r = 4$ 或 $\frac{1}{4}$ (不合)

- () 14. 從 1 到 10 的自然數中，任取三個相異的數字，由小到大排列，最多能排出幾組不同的等比數列？ (A) 3 組 (B) 4 組 (C) 6 組 (D) 7 組

【龍騰自命題.】

解答 B

解析 有 1、2、4；1、3、9；2、4、8；4、6、9 共四組

- () 15. 已知一等比數列首項為 162，公比為

$\frac{1}{3}$ ，且第 n 項 $a_n = \frac{2}{27}$ ，則此數列之項數 $n =$

- (A)9 (B)8 (C)7 (D)6

【隨堂講義補充題。】

解答 B

解析 $a_1 = 162$ ， $r = \frac{1}{3}$ ，由 $a_n = a_1 r^{n-1}$

$$\Rightarrow \frac{2}{27} = 162 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \Rightarrow \frac{1}{27} = 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\Rightarrow 3^{-3} = 3^4 \times (3^{-1})^{n-1} = 3^{5-n} \Rightarrow -3 = 5-n$$

$$\therefore n = 8$$

- () 16. 已知一等差級數前 n 項和為 $5n^2$ ，求公差為 (A)10 (B)15 (C)5 (D)20

【龍騰自命題。】

解答 A

解析 $S_n = 5n^2$

$$a_1 = S_1 = 5$$

$$a_1 + a_2 = S_2 = 5 \times 2^2 = 20$$

$$\therefore a_2 = 20 - 5 = 15, \text{ 公差 } d = a_2 - a_1 = 10$$

- () 17. 已知等比數列首項為 -4 ，且 $a_8 = 32\sqrt{2}$ ，求此數列之公比 $r =$ (A) $-\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{2}$

(C) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ (D) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

【隨堂講義補充題。】

解答 A

解析 $\therefore a_1 = -4$ ， $a_8 = 32\sqrt{2}$

$$\text{由 } a_n = a_1 r^{n-1} \Rightarrow a_8 = a_1 r^7$$

$$\Rightarrow 32\sqrt{2} = -4 \times r^7 \Rightarrow r^7 = -8\sqrt{2} = (-\sqrt{2})^7$$

$$\therefore r = -\sqrt{2}$$

- () 18. 問級數 $\sum_{k=1}^5 (2k-3)$ 的和為 (A)15
(B)17 (C)13 (D)19

【龍騰自命題。】

解答 A

解析 $\sum_{k=1}^5 (2k-3) = (-1) + 1 + 3 + 5 + 7 = 15$

- () 19. 一等比級數 $S_n = 3 + 9 + 27 + \dots$ ，則滿足 $S_n > 700$ 之最小整數 n 為多少？ (A)5
(B)6 (C)7 (D)8

【隨堂講義補充題。】

解答 B

解析 $a_1 = 3$ ， $r = 3$

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{3 \times (3^n - 1)}{3 - 1} > 700$$

$$\Rightarrow 3(3^n - 1) > 1400 \Rightarrow 3^n > 467 \dots$$

又 $3^5 = 243 < 467$ ， $3^6 = 729 > 467$ ，故取 $n = 6$

- () 20. 已知一等比級數首項為 6 ，公比為 2 ，其前 n 項的和為 1530 ，則項數 n 值為何？
(A)11 (B)10 (C)9 (D)8

【隨堂講義補充題。】

解答 D

解析 $a_1 = 6$ ， $r = 2$ ， $S_n = 1530$

$$\text{由 } S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1} \Rightarrow 1530 = \frac{6 \times (2^n - 1)}{2 - 1}$$

$$\Rightarrow 1530 = 6 \times (2^n - 1) \Rightarrow 2^n = 256 \Rightarrow n = 8$$

- () 21. $\sqrt{2}$ 和 $4\sqrt{2}$ 的等比中項為 (A) $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ (B)
 ± 2 (C) $\pm 2\sqrt{2}$ (D) ± 4

【龍騰自命題。】

解答 C

() 22. $\sum_{k=1}^n (k-1)^2 =$ (A) $\frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6}$

(B) $\frac{2n^3 + 3n - n}{6}$ (C) $\frac{2n^3 - 3n^2 - n}{6}$

(D) $\frac{2n^3 + 3n + n}{6}$

【龍騰自命題。】

解答 A

解析 〈法一〉

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (k-1)^2 &= 0^2 + 1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 = \sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{1}{6}(n-1)(n)[2(n-1)+1] \\ &= \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6} \end{aligned}$$

〈法二〉

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (k-1)^2 &= \sum_{k=1}^n (k^2 - 2k + 1) = \sum_{k=1}^n k^2 - 2 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2 \times \frac{n(n+1)}{2} + n = \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6} \end{aligned}$$

- () 23. 一等差數列第 4 項是 51 ，第 9 項是 31 ，則此數列自第幾項開始為負數？ (A)16
(B)17 (C)18 (D)19

【龍騰自命題。】

解答 B

() 24. $\sum_{k=1}^9 \frac{1}{k(k+1)} =$ (A) $\frac{1}{99}$ (B) $\frac{1}{10}$ (C) $\frac{9}{10}$
(D) $\frac{11}{10}$

【龍騰自命題.】

解答 C

解析

$$\sum_{k=1}^9 \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^9 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{10} \right) = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$$

() 25. 一等比數列的第 5 項為 -2 ，第 10 項為 486 ，則公比 = (A) -3 (B) -2
(C) 2 (D) 3

【龍騰自命題.】

解答 A