

1220 數列級數

姓名： 座號：

一、單選題 (25 題 每題 4 分 共 100 分)

() 1. 設 $i = \sqrt{-1}$ ，若級數 $\sum_{n=1}^{50} (i^3)^n = a + bi$ ，則 $a + 2b =$ (A) -1 (B) -3 (C) 1 (D) 3

【095 年歷屆試題】

解答 B

解析 $\sum_{n=1}^{50} (i^3)^n = \sum_{n=1}^{50} (-i)^n = (-i) + (-i)^2 + (-i)^3 + \dots + (-i)^{50}$
 $= [(-i) + (-1) + i + 1] + [(-i) + (-1) + i + 1] + \dots$
 $+ [(-i) + (-1) + i + 1] + (-i) + (-1)$
 $= 0 + 0 + \dots + 0 - i - 1 = -1 - i = a + bi$

即 $a = -1, b = -1$

$\therefore a + 2b = -3$

() 2. 設一等比級數首項為 10，公比為 3，和為 3640，求項數 $n =$ (A) 10 (B) 5 (C) 7 (D) 6

【龍騰自命題】

解答 D

解析 $\frac{10(3^n - 1)}{3 - 1} = 3640 \Rightarrow 3^n - 1 = 728 \Rightarrow 3^n = 729 \Rightarrow n = 6$

() 3. 設一凸 n 邊形，各內角成等差數列，若公差為 4° ，最大內角為 172° ，則邊數為 (A) 12 (B) 15 (C) 18 (D) 20

【龍騰自命題】

解答 A

解析 外角度數分別為 $8^\circ, 12^\circ, 16^\circ, \dots$ ，又外角和 $8^\circ + 12^\circ + 16^\circ + \dots = 360^\circ$

$\Rightarrow \frac{2 \times 8^\circ + (n-1) \times 4^\circ}{2} \times n = 360^\circ \Rightarrow (n-12)(n+15) = 0 \Rightarrow n = 12$

() 4. 試求 3 與 11 的等差中項為 (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7

【隨堂測驗】

解答 D

解析 3 與 11 之等差中項 $= \frac{3+11}{2} = 7$

() 5. 若 $a, 5, b, c, d, -3$ 成等差，則公差為 (A) -1 (B) -4 (C) -2 (D) 2

【龍騰自命題】

解答 C

解析 公差 $= \frac{-3-5}{4} = -2$

() 6. 求 -10 與 -8 的等差中項為 (A) -2 (B) 9 (C) -9 (D) -1

【龍騰自命題】

解答 C

解析 a, b 之等差中項 $= \frac{a+b}{2}$ ，故所求 $= \frac{-10+(-8)}{2} = -9$

() 7. 若一等差數列第 5 項為 32，第 9 項為 20，則此數列第幾項開始為負數？ (A) 16 (B) 15 (C) 14 (D) 13

【隨堂講義補充題】

解答 A

解析 $\begin{cases} a_5 = a_1 + 4d = 32 \dots \textcircled{1} \\ a_9 = a_1 + 8d = 20 \dots \textcircled{2} \end{cases}$

由 $\textcircled{1}\textcircled{2}$ 解得 $d = -3, a_1 = 44$

設第 n 項開始為負數，即 $a_n < 0$

$$\Rightarrow a_1 + (n-1)d < 0 \Rightarrow 44 + (n-1) \times (-3) < 0$$

$$\Rightarrow -3n + 47 < 0 \Rightarrow 3n > 47 \Rightarrow n > \frac{47}{3} \doteq 15.7$$

故取 $n=16$

- () 8. 在 24 與 -8 之間插入 11 個數，使這 13 個數成為等差數列，試求插入的第幾項為 0？ (A)7 (B)9 (C)10 (D)11

【隨堂測驗】

解答 B

解析 $a_1 = 24, a_{13} = -8$

$$a_{13} = a_1 + (13-1)d$$

$$\Rightarrow -8 = 24 + 12d \Rightarrow d = -\frac{8}{3}$$

$$\text{則 } a_k = a_1 + (k-1)d = 0$$

$$\Rightarrow 24 + (k-1)\left(-\frac{8}{3}\right) = 0 \Rightarrow k = 10 \text{ (第 10 項為 0)}$$

故插入的第 9 項為 0

- () 9. 若 $S_n = \sum_{i=1}^n a_i$ ，已知 $S_n = n^2 + 3n$ ，則 $a_{20} =$ (A)23 (B)46 (C)64 (D)42

【龍騰自命題】

解答 D

解析 $a_{20} = S_{20} - S_{19} = 20^2 + 3 \times 20 - 19^2 - 3 \times 19 = 42$

- () 10. 設一等差數列首項為 5，公差為 7，和為 365，則此級數共有幾項？ (A)10 (B)7 (C)9 (D)11

【龍騰自命題】

解答 A

解析 $365 = \frac{2 \times 5 + (n-1) \times 7}{2} \times n$

$$\Rightarrow 7n^2 + 3n - 730 = 0 \Rightarrow (n-10)(7n+73) = 0$$

$$\therefore n = 10 \text{ 或 } n = -\frac{73}{7} \text{ (不合)}$$

- () 11. 已知等比數列第 4 項為 45，第 7 項為 $-\frac{5}{3}$ ，則下列何者為非？ (A)首項 $a_1 = -1215$ (B)公比 $r = -\frac{1}{3}$ (C)第 10 項 $a_{10} = -\frac{5}{81}$

(D) $\frac{5}{729}$ 為此數列的第 12 項

【隨堂講義補充題】

解答 C

解析 由 $a_n = a_1 r^{n-1}$ 知 $\begin{cases} a_4 = a_1 r^3 = 45 \cdots \cdots \textcircled{1} \\ a_7 = a_1 r^6 = -\frac{5}{3} \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$

$$\text{由 } \frac{\textcircled{2}}{\textcircled{1}} \text{ 得 } r^3 = -\frac{1}{27} \Rightarrow r = -\frac{1}{3}$$

代入 $\textcircled{1}$ 式得 $a_1 = -1215$

$$\text{則 } a_{10} = a_7 r^3 = \left(-\frac{5}{3}\right) \times \left(-\frac{1}{27}\right) = \frac{5}{81}$$

$$a_{12} = a_{10} r^2 = \frac{5}{81} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{5}{729}$$

() 12. 已知 $\sum_{k=0}^4 (ak+b) = 25$, $\sum_{k=2}^5 (ak-b) = 24$, 則 $a =$ (A)0 (B)1 (C)2 (D)3

【龍騰自命題.】

解答 C

解析 $\begin{cases} 10a+5b=25 \\ 14a-4b=24 \end{cases} \Rightarrow a=2, b=1$

() 13. $S_n = \sum_{i=1}^n a_i$, 若 $S_n = n^2 + 3n$, 則 $a_n =$ (A) $2n-2$ (B) $2n-1$ (C) $2n+2$ (D) $2n+4$

【龍騰自命題.】

解答 C

解析 $a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 + 3n - (n-1)^2 - 3(n-1) = 2n+2$

() 14. 問級數 $\sum_{i=1}^{100} 4$ 的和為 (A) 4^{100} (B)400 (C)25 (D) 100^4

【龍騰自命題.】

解答 B

解析 $\sum_{i=1}^{100} 4 = 4+4+4+\dots+4$ (連加100次) = 400

() 15. 若兩等差數列第 n 項之比為 $(3n+1) : (7n-1)$, 則兩數列前 7 項和之比為 (A)11 : 24 (B)13 : 27 (C)3 : 7 (D)4 : 9

【龍騰自命題.】

解答 B

解析 $\because S_7 = 7a_4 \quad \therefore S_7 : S'_7 = 7a_4 : 7a'_4 = a_4 : a'_4 = 13 : 27$

() 16. 已知一等比級數首項為 6 , 公比為 2 , 其前 n 項的和為 1530 , 則項數 n 值為何? (A)11 (B)10 (C)9 (D)8

【隨堂講義補充題.】

解答 D

解析 $a_1 = 6, r = 2, S_n = 1530$

由 $S_n = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1} \Rightarrow 1530 = \frac{6 \times (2^n-1)}{2-1}$

$\Rightarrow 1530 = 6 \times (2^n-1) \Rightarrow 2^n = 256 \Rightarrow n = 8$

() 17. 若兩等差級數 , 前 n 項和之比為 $(3n+1) : (7n-1)$, 則兩數列第 7 項之比為 (A)11 : 24 (B)13 : 27 (C)3 : 7 (D)4 : 9

【龍騰自命題.】

解答 D

解析 $\because a_7 : b_7 = 13a_7 : 13b_7 = S_{13} : S'_{13} = [3(13)+1] : [7(13)-1] = 4 : 9$

() 18. 一等比級數共有 10 項 , 和為 682 , 公比為 -2 , 則此級數第 7 項為何? (A)-128 (B)128 (C)-64 (D)64

【隨堂講義補充題.】

解答 A

解析 $n = 10, S_n = 682, r = -2$

由 $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} \Rightarrow 682 = \frac{a_1[1-(-2)^{10}]}{1-(-2)}$

$\Rightarrow 2046 = a_1 \times (-1023) \Rightarrow a_1 = -2$

則 $a_7 = a_1 r^6 = (-2) \times (-2)^6 = -128$

() 19. 在 $\frac{1}{4}$ 和 $\frac{4}{81}$ 之間插入 3 個正數 , 使這 5 個數成等比數列 , 則插入的第三數為 (A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{9}$ (C) $\frac{2}{16}$ (D) $\frac{2}{27}$

【龍騰自命題.】

解答 D

解析 $a_1 = \frac{1}{4}, a_5 = \frac{4}{81} \Rightarrow \frac{4}{81} = \frac{1}{4}r^4 \Rightarrow r = \pm \frac{2}{3}$ (負不合)

插入的第三數為 $a_4 = a_1 r^3 = \frac{1}{4} \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{27}$

() 20. 設等比數列的第 3 項為 4，公比為 -3 ，則第 5 項為 (A) -4 (B) -12 (C) 12 (D) 36

【龍騰自命題.】

解答 D

() 21. 一等差數列第 4 項是 51，第 9 項是 31，則此數列第幾項是 -53 ? (A) 26 (B) 29 (C) 30 (D) 33

【龍騰自命題.】

解答 C

() 22. 下列公式何者錯誤? (A) $\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k$ (B) $\sum_{k=1}^n c a_k = c \sum_{k=1}^n a_k$ (C) $\sum_{k=1}^n a_k b_k = \sum_{k=1}^n a_k \sum_{k=1}^n b_k$ (D) $\sum_{k=1}^n c = nc$

【龍騰自命題.】

解答 C

() 23. $1 \sim 100$ 之間，所有被 7 整除的數之總和為何? (A) 753 (B) 728 (C) 637 (D) 735

【課本練習題-自我評量.】

解答 D

解析 已知 $a_1 = 7, d = 7, a_n = 98$

由 $a_n = a_1 + (n-1)d$

得 $98 = 7 + (n-1) \times 7 \Rightarrow n = 14$

$S_{14} = \frac{14(7+98)}{2} = 735$

() 24. 已知四個正數 a, b, c, d 為一等比數列，若 $a+b=20, a+b+c+d=65$ ，則 $a =$ (A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8

【104 年歷屆試題.】

解答 D

解析 設等比數列的公比為 r ($r > 0$)

則 $b = ar, c = ar^2, d = ar^3$

$a+b=20 \Rightarrow a+ar=20$

$\Rightarrow a(1+r) = 20 \dots \dots \textcircled{1}$

$a+b+c+d=65 \Rightarrow 20+c+d=65$

$\Rightarrow c+d=45$

$\Rightarrow ar^2+ar^3=45$

$\Rightarrow ar^2(1+r) = 45 \dots \dots \textcircled{2}$

$\frac{\textcircled{2}}{\textcircled{1}} : \frac{ar^2(1+r)}{a(1+r)} = \frac{45}{20} \Rightarrow r^2 = \frac{9}{4}$

$\Rightarrow r = \pm \frac{3}{2}$ (負不合)

$r = \frac{3}{2}$ 代入 $\textcircled{1} : a(1+\frac{3}{2}) = 20 \Rightarrow a = 8$

() 25. 設 a, b, c, d, e, f 六數成等比數列，且已知 $a+c+e=168, b+d+f=84$ ，則 d 之值為何? (A) 6 (B) 9 (C) 16 (D) 32

【105 年歷屆試題.】

解答 C

解析 設等比數列的公比為 r ，

則 $b = ar, c = ar^2, d = ar^3, e = ar^4, f = ar^5$

$a+c+e=168 \Rightarrow a+ar^2+ar^4=168 \Rightarrow a(1+r^2+r^4)=168 \dots \dots \textcircled{1}$

$$b+d+f=84 \Rightarrow ar+ar^3+ar^5=84 \Rightarrow ar(1+r^2+r^4)=84 \dots \textcircled{2}$$

$$\frac{\textcircled{2}}{\textcircled{1}} : \frac{ar(1+r^2+r^4)}{a(1+r^2+r^4)} = \frac{84}{168} \Rightarrow r = \frac{1}{2}$$

$$r = \frac{1}{2} \text{ 代入 } \textcircled{1} : a\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}\right) = 168 \Rightarrow a = 128$$

$$\text{所求 } d = ar^3 = 128 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 16$$