1213 第一二冊　姓名　　　　　　座號

一、單選題 (25 題 每題 4 分 共 100 分)

(　　) 1.已知△ABC 三頂點為 $A(-1,3)$、$B(2,1)$、$C(-3,-1)$，若直線 $\overleftrightarrow{AD}$ 平分△ABC 的面積，則直線 $\overleftrightarrow{AD}$ 之方程式為何？ (A)$3x+y=0$ (B)$3x-y+6=0$ (C)$6x-y+9=0$ (D)$6x+y+3=0$

【091 年歷屆試題.】

解答　D

解析　由題目中，$\overleftrightarrow{AD}$ 平分△ABC 的面積

$\Rightarrow$ $\overleftrightarrow{AD}$ 通過 $B(2,1)$、$C(-3,-1)$的中點

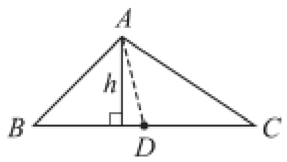
$(\dfrac{2+(-3)}{2},\dfrac{1+(-1)}{2})$，即$(-\dfrac{1}{2},0)$

再由 $A(-1,3)$得 $\overleftrightarrow{AD}$：$y-0=\dfrac{3-0}{-1-(-\frac{1}{2})}(x-(-\dfrac{1}{2}))$

$\Rightarrow$ $y=\dfrac{3}{-1+(\frac{1}{2})}(x+\dfrac{1}{2})$ $\Rightarrow$ $y=\dfrac{3}{-\frac{1}{2}}(x+\dfrac{1}{2})$

$\Rightarrow$ $y=-6(x+\dfrac{1}{2})$

$\Rightarrow$ $y=-6x-3$ $\Rightarrow$ $6x+y+3=0$



(　　) 2.已知 x、y 均為實數且滿足不等式 $x\geq 0$，$y\geq 0$，$4x+3y\geq 18$，$x+3y\geq 9$，則 $x+y$ 的最小值為何？ (A)4 (B)5 (C)6 (D)9

【091 年歷屆試題.】

解答　B

解析　由題目中，不等式組：$\begin{cases}x\geq 0,y\geq 0\\4x+3y\geq 18\\x+3y\geq 9\end{cases}$

畫出可行解區域

(1)$4x+3y=18\cdots$①

x	0	$\frac{9}{2}$
y	6	0

(2)$x+3y=9\cdots$②

x	0	9
y	3	0

由①、②解聯立：①－②得 $3x=9$ $\Rightarrow$ $x=3$ $\Rightarrow$ $y=2$

$\therefore$ $B(3,2)$

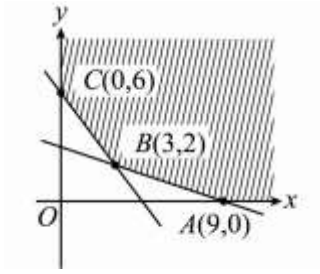
頂點 $A(9,0)$、$B(3,2)$、$C(0,6)$

$\Rightarrow$ $A(9,0)$ $\Rightarrow$ $x+y=9+0=9$

$B(3,2)$ $\Rightarrow$ $x+y=3+2=5$（最小）

$C(0,6)$ $\Rightarrow$ $x+y=0+6=6$

故得 $x+y$ 最小值 5



(　　) 3.已知 $i=\sqrt{-1}$，且 a、b 為實數，若 $\dfrac{1-3i}{1+i}=a+bi$，則 $a+b=$ (A)-3 (B)-1 (C)1 (D)3

【091 年歷屆試題.】

解答　A

解析　由題目中

$\dfrac{1-3i}{1+i}=\dfrac{(1-3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{1-i-3i+3i^2}{1^2-i^2}=\dfrac{1-4i-3}{1+1}=\dfrac{-2-4i}{2}=-1-2$

$\therefore$ $a=-1$，$b=-2$

故得 $a+b=-3$

(　　) 4.若 α、β 均為實數，且 $\alpha^3=2+\sqrt{5}$，$\beta^3=2-\sqrt{5}$，則 $\alpha+\beta=$ (A)-1 (B)1 (C)2 (D)4

【098 年歷屆試題.】

解答　B

解析　$\alpha^3\beta^3=(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})=2^2-(\sqrt{5})^2=-1$ $\Rightarrow$ $\alpha\beta=-1$

$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)=(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta)$

$=(\alpha+\beta)[(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta-\alpha\beta]=(\alpha+\beta)[(\alpha+\beta)^2-3\alpha\beta]$

$=(\alpha+\beta)[(\alpha+\beta)^2-3\times(-1)]=(\alpha+\beta)^3+3(\alpha+\beta)$

設 $\alpha+\beta=x$，則 $\alpha^3+\beta^3=x^3+3x$，而

$\alpha^3+\beta^3=(2+\sqrt{5})+(2-\sqrt{5})=4$

因此 $x^3+3x=4$ $\Rightarrow$ $x^3+3x-4=0$ $\Rightarrow$ $(x-1)(x^2+x+4)=0$

$\Rightarrow$ $x-1=0$ 或 $x^2+x+4=0$

而 $x^2+x+4=0$ 無實數解

故 $x=1$，即 $\alpha+\beta=1$

(　　) 5.若 $\begin{vmatrix}x & 1 & 2\\x-1 & 2 & 4\\x-2 & 4 & 7\end{vmatrix}=0$，則 $x=$ (A)-1 (B)0 (C)1 (D)2

【092 年歷屆試題.】

解答　A

解析

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ x-1 & 2 & 4 \\ x-2 & 4 & 7 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ x-1 & 2 & 0 \\ x-2 & 4 & -1 \end{vmatrix}=0$$（依第三行降階）

$\times(-2)$

$$\Rightarrow (-1)\times\begin{vmatrix} x & 1 \\ x-1 & 2 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow (-1)\times[2x-(x-1)]=0$$

∴ $x=-1$

《註》本題亦可由三階行列式直接展開來求 x 值

( ) 6.已知 $i=\sqrt{-1}$，則$(1-i)^6=$ (A)$-8i$ (B)$8i$ (C)$12-8i$ (D)$12+8i$

【092 年歷屆試題.】

解答 B

解析 $(1-i)^6=[(1-i)^2]^3=(-2i)^3=-8i^3=8i$

《另解》

$$(1-i)^6=[\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i)]^6=[\sqrt{2}(\cos\frac{7}{4}\pi+i\sin\frac{7}{4}\pi)]^6$$

$$=2^3(\cos\frac{21}{2}\pi+i\sin\frac{21}{2}\pi)=8(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})=8(0+i\times1)=8i$$

( ) 7.設$\dfrac{5x^2+2x-4}{(x-1)(x^2+x-1)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{Bx+C}{x^2+x-1}$，則 $A+B+C=$

(A)3 (B)4 (C)5 (D)6

【098 年歷屆試題.】

解答 D

解析 原式兩側乘以$(x-1)(x^2+x-1)$

$\Rightarrow$ $5x^2+2x-4=A(x^2+x-1)+(Bx+C)(x-1)$

$=(A+B)x^2+(A-B+C)x+(-A-C)$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=5 & \cdots① \\ A-B+C=2 & \cdots② \\ -A-C=-4 & \cdots③ \end{cases}$$

由①＋② $2A+C=7\cdots$④

由③＋④ $A=3$，代回① $\Rightarrow$ $B=2$，代回③ $\Rightarrow$ $C=1$

故 $A+B+C=3+2+1=6$

( ) 8.設 $0\le x\le 2\pi$，試問函數 $f(x)=\sin^2x-2\cos x+2$ 之最大值為何？ (A)1 (B)2 (C)4 (D)5

【095 年歷屆試題.】

解答 C

解析 $f(x)=\sin^2x-2\cos x+2=1-\cos^2x-2\cos x+2=-(\cos^2x+2\cos x+1)+4$

$=-(\cos x+1)^2+4$

但 $0\le x\le 2\pi$ $\Rightarrow$ $|\cos x|\le 1$

∴ 當 $\cos x=-1$ 時 $f(x)$有最大值 $-(-1+1)^2+4=4$

( ) 9.試問在坐標平面上原點至點$(\sin15°,\sin75°)$的距離為何？ (A)$\frac{1}{2}$ (B)$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (C)$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D)1

【096 年歷屆試題.】

解答 D

解析 $d=\sqrt{(\sin15°-0)^2+(\sin75°-0)^2}=\sqrt{\sin^2 15°+\sin^2 75°}$

$=\sqrt{\sin^2 15°+\cos^2 15°}=1$

( ) 10.在坐標平面上，滿足不等式$|x|\le y\le 8$ 的區域面積為何？ (A)16 (B)32 (C)64 (D)128

【094 年歷屆試題.】

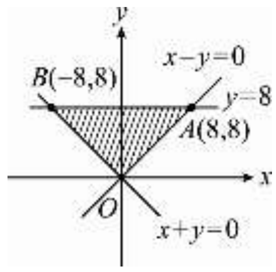
解答 C

解析 ∵ $|x|\le y\le 8$

$$\Rightarrow \begin{cases} |x|\le y \\ y\le 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y\le x\le y \\ y\le 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y\ge 0 \\ x-y\le 0 \\ y\le 8 \end{cases}$$

不等式所成區域如圖所示

（為△OAB）：



∴ 所成區域面積（即△OAB 面積）$=\frac{1}{2}\times16\times8=64$

( ) 11.設 $i=\sqrt{-1}$ 且 a 與 b 為兩實數，若$(a+bi)(1+3i)=8+4i$，則$(a+bi)^2=$ (A)$8i$ (B)$-8i$ (C)$8+8i$ (D)$8-8i$

【094 年歷屆試題.】

解答 B

解析 ∵ $(a+bi)(1+3i)=8+4i$

$$\Rightarrow a+bi=\frac{8+4i}{1+3i}=\frac{(8+4i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}=\frac{20-20i}{10}=2-2i$$

∴ $(a+bi)^2=(2-2i)^2=4-8i+4i^2=-8i$

( ) 12.設 θ 為實數，若 $\sin 2\theta=\frac{1}{3}$，則$(\sin\theta-\cos\theta)^2=$ (A)$\frac{2}{3}$ (B)1 (C)$\frac{4}{3}$ (D)$\frac{5}{3}$

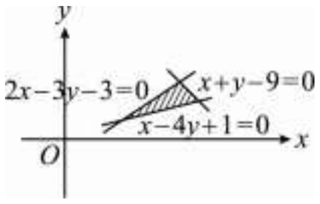
【094 年歷屆試題.】

解答 A

解析

$$(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=1-\sin2\theta=1-\frac{1}{3}=$$

( ) 13.下列二元一次聯立不等式中，何者代表圖中所示之三角區域？



(A)$\begin{cases} x-4y+1\le 0 \\ 2x-3y-3\ge 0 \\ x+y-9\le 0 \end{cases}$ (B)$\begin{cases} x-4y+1\le 0 \\ 2x-3y-3\le 0 \\ x+y-9\le 0 \end{cases}$

(C)$\begin{cases} x-4y+1\ge 0 \\ 2x-3y-3\ge 0 \\ x+y-9\ge 0 \end{cases}$ (D)$\begin{cases} x-4y+1\ge 0 \\ 2x-3y-3\le 0 \\ x+y-9\le 0 \end{cases}$

【100 年歷屆試題.】

解答 A

解析 對於三角區域，

在直線 $x-4y+1=0$ 及其左側 $\Rightarrow$ $x-4y+1\le 0$

在直線 $2x-3y-3=0$ 及其右側 $\Rightarrow$ $2x-3y-3\ge 0$

在直線 $x+y-9=0$ 及其左側 $\Rightarrow$ $x+y-9\le 0$

( ) 14.下列各三角函數值，何者數值最小？ (A)sin885° (B)cos(－430°) (C)tan131° (D)sin(－2010°)

【099 年歷屆試題.】

解答 C

解析 $\sin 885^\circ=\sin(2\times 360^\circ+165^\circ)=\sin 165^\circ=\sin(180^\circ-15^\circ)$

$=\sin 15^\circ>0$

$\cos(-430^\circ)=\cos 430^\circ=\cos(360^\circ+70^\circ)=\cos 70^\circ>0$

$\tan 131^\circ=\tan(180^\circ-49^\circ)=-\tan 49^\circ<0$

$\sin(-2010^\circ)=\sin(-6\times 360^\circ+150^\circ)=\sin 150^\circ=$

$\sin(180^\circ-30^\circ)=\sin 30^\circ>0$

由上可知 tan131°的值最小

故選(C)

( ) 15.設 a、b、c、d 為實數，若 x^2-1 為 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 之因式，且 $f(x)$除以 $x-2$ 餘 6，則 $2a+b=$ (A)－4 (B)－2 (C)2 (D)4

【099 年歷屆試題.】

解答 C

解析 $\because$ x^2-1 為 $f(x)$的因式且 $x^2-1=(x+1)(x-1)$

$\therefore$ $x+1$ 與 $x-1$ 皆為 $f(x)$的因式

$\Rightarrow$ $f(-1)=0$，$f(1)=0$

即 $f(-1)=-a+b-c+d=0\cdots$①

$f(1)=a+b+c+d=0\cdots$②

$\because$ $f(x)$除以 $x-2$ 餘 6 $\therefore$ $f(2)=6$

即 $f(2)=8a+4b+2c+d=6\cdots$③

①＋② $2b+2d=0$ $\Rightarrow$ $d=-b$

②－① $2a+2c=0$ $\Rightarrow$ $c=-a$

以 $d=-b$，$c=-a$ 代入③得

$8a+4b+2(-a)+(-b)=6$

$\Rightarrow$ $6a+3b=6\xrightarrow{\div 3}2a+b=2$

故選(C)

( ) 16.在坐標平面上，若△ABC 之三頂點坐標分別為 $A(2,0)$、$B(4,0)$與 $C(4,3)$，則△ABC 之三邊上共有多少點與原點的距離恰為整數值？ (A)2 個 (B)4 個 (C)6 個 (D)8 個

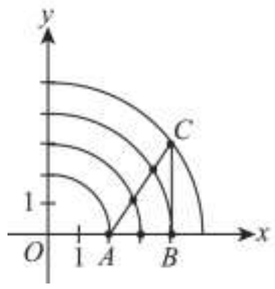
【099 年歷屆試題.】

解答 C

解析 以原點為圓心，作出半徑為 2、3、4、5 的圓

這些圓與△ABC 的邊長共有 6 個交點，

也就是△ABC 之三邊上共有 6 個點與原點的距離恰為整數值



故選(C)

( ) 17.試問下列哪一個三角函數值與 sec250°相等？ (A)－csc70° (B)－sec110° (C)－sec340° (D)－csc160°

【101 年歷屆試題.】

解答 D

解析 $\sec 250^\circ=\sec(180^\circ+70^\circ)=-\sec 70^\circ$

(A) $-\csc 70^\circ=-\csc(90^\circ-20^\circ)=-\sec 20^\circ$

(B) $-\sec 110^\circ=-\sec(180^\circ-70^\circ)=-(-\sec 70^\circ)=\sec 70^\circ$

(C) $-\sec 340^\circ=-\sec(360^\circ-20^\circ)=-\sec 20^\circ$

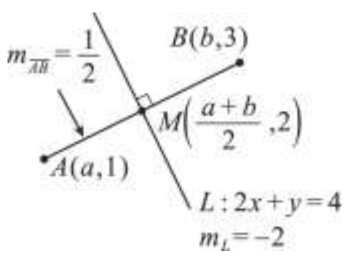
(D) $-\csc 160^\circ=-\csc(180^\circ-20^\circ)=-\csc 20^\circ=-\csc(90^\circ-70^\circ)=-\sec 70^\circ$

( ) 18.在坐標平面上，設 a，b 為實數，若 A、B 兩點的坐標分別為$(a,1)$、$(b,3)$，且線段 $\overline{AB}$ 的垂直平分線為 $2x+y=4$，則 $2a+b=$ ？ (A)1 (B)2 (C)－1 (D)－2

【097 年歷屆試題.】

解答 A

解析 作簡略圖形如下：



設 $A(a,1)$、$B(b,3)$的中點為 $M(\frac{a+b}{2},\frac{1+3}{2})=(\frac{a+b}{2},2)$

(1)M 為直線 L:$2x+y=4$ 上一點

$\Rightarrow$ $2\times(\frac{a+b}{2})+2=4$ $\Rightarrow$ $a+b=2\cdots$①

(2)又 $m_{\overline{AB}}=\frac{3-1}{b-a}$，$m_L=-2$

$\because$ $\overline{AB}\perp L$ $\Rightarrow$ $m_{\overline{AB}}\times m_L=-1$

$\Rightarrow\ \dfrac{3-1}{b-a}\times(-2)=-1\ \Rightarrow\ a-b=-4\cdots②$

由①②解聯立得 $a=-1$，$b=3$　∴　$2a+b=2\times(-1)+3=1$

(　　) 19.設 $P(-2,4)$與 $Q(2,-2)$，若直線 L：$ax+3y+b=0$ 為 $\overline{PQ}$ 的垂直平分線，求 $a+b$ 之值為何？ (A)$-\dfrac{15}{2}$ (B)-5 (C)-1 (D)$\dfrac{3}{2}$

【101 年歷屆試題.】

解答 B

解析 $\overline{PQ}$ 的中點 $M(\dfrac{-2+2}{2},\dfrac{4+(-2)}{2})=(0,1)$

直線 PQ 的斜率 $m_{PQ}=\dfrac{4-(-2)}{-2-2}=-\dfrac{3}{2}$　直線 L 的斜率 $m=-\dfrac{a}{3}$

∵　$\overline{PQ}\perp L$　∴　$m_{PQ}\times m=-1$　$\Rightarrow$

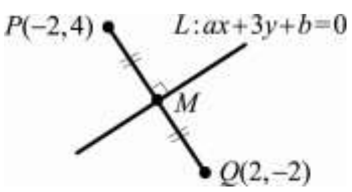
$-\dfrac{3}{2}\times(-\dfrac{a}{3})=-1$　$\Rightarrow$　$a=-2$

則直線 L：$-2x+3y+b=0$

∵　$M(0,1)$在直線 L 上　∴　$-2\times0+3\times1+b=0$

$\Rightarrow$　$b=-3$

故 $a+b=-2+(-3)=-5$



(　　) 20.有一繩子的長度是 24 公分，若圍成正三角形的面積為 a 平方公分；圍成正方形的面積為 b 平方公分；圍成正六邊形的面積為 c 平方公分，則下列何者正確？ (A)$a<b<c$ (B)$a<c<b$ (C)$c<a<b$ (D)$c<b<a$

【095 年歷屆試題.】

解答 A

解析 ∵　繩子的長度為 24 公分

$\Rightarrow$　正三角形、正方形、正六邊形的邊長分別為 8 公分、6 公分、4 公分

$\Rightarrow$　正三角形面積為 $a=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times8^2=16\sqrt{3}$（平方公分）

正方形面積為 $b=6^2=36$（平方公分）

正六邊形面積為 $c=6\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times4^2=24\sqrt{3}$（平方公分）

∴　$a<b<c$

(　　) 21.在$\triangle ABC$ 中，設 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 之對應邊長分別為 a、b、c，若 $\angle B=120°$，$a=5$，$c=3$，則$\triangle ABC$ 的外接圓面積為何？ (A)$\dfrac{7}{\sqrt{3}}\pi$ (B)$\dfrac{49}{\sqrt{3}}\pi$ (C)$\dfrac{7}{3}\pi$ (D)$\dfrac{49}{3}\pi$

【095 年歷屆試題.】

解答 D

解析 $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B=3^2+5^2-2\times3\times5\times\cos120°=9+25-(-15)=49$

$\Rightarrow$　$b=\sqrt{49}=7$

又 $\dfrac{b}{\sin B}=2R$　$\Rightarrow$　$\dfrac{7}{\sin120°}=2R$　$\Rightarrow$　$\dfrac{7}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2R$

$\Rightarrow$　$R=\dfrac{7}{\sqrt{3}}$

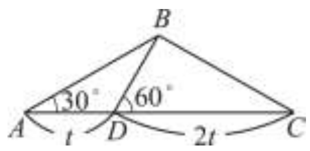
∴　$\triangle ABC$ 的外接圓面積為 $\pi R^2=\pi\times(\dfrac{7}{\sqrt{3}})^2=\dfrac{49}{3}\pi$

(　　) 22.在$\triangle ABC$ 中，若 D 點在線段 $\overline{AC}$ 上且 $\overline{AD}$ ：$\overline{DC}=1$：2，又$\angle BAD=30°$，$\angle BDC=60°$，則$\angle DCB$ 的角度為何？ (A)30° (B)45° (C)60° (D)75°

【099 年歷屆試題.】

解答 A

解析



令 $\overline{AD}=t$ 、$\overline{DC}=2t$ ，其中 $t>0$

∵　$\angle BDC=60°$　$\Rightarrow$　$\angle BDA=120°$　$\Rightarrow$　$\angle ABD=30°$

∴　$\triangle DAB$ 為等腰三角形　$\Rightarrow$　$\overline{DB}=t$

由餘弦定理知，在$\triangle BCD$ 中，

$\overline{BC}^2=\overline{DB}^2+\overline{DC}^2-2\overline{DB}\times\overline{DC}\times\cos(\angle BDC)$

$=t^2+(2t)^2-2\times t\times2t\times\cos60°=3t^2$　$\Rightarrow$

$\overline{BC}=\sqrt{3}t$

由正弦定理，在$\triangle BCD$ 中

$\dfrac{\sqrt{3}t}{\sin60°}=\dfrac{t}{\sin C}$　$\Rightarrow$　$\sin C=\dfrac{1}{2}$　$\Rightarrow$　$\angle C=30°$或 150°（不合）

故$\angle DCB=30°$

故選(A)

(　　) 23.下列方程式所對應的圖形中，何者恆在 x 軸的上方？
(A) $y=5x^2-3x+1$ (B) $y=3x^2+5x-1$
(C) $y=x^2-5x+3$ (D) $y=3x^2+x-5$

【104 年歷屆試題.】

解答 A

解析 ∵　四個選項的 x^2 項係數均為正數

∴　皆為開口向上的拋物線

(A) $(-3)^2-4\times5\times1=-11<0\rightarrow$符合

(B) $5^2-4\times3\times(-1)=37>0$

(C) $(-5)^2-4\times1\times3=13>0$

(D) $1^2-4\times3\times(-5)=61>0$

(　　) 24.已知 $\left|\overrightarrow{a}\right|=1$，$\left|\overrightarrow{b}\right|=\sqrt{5}$，$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=-2$。若

$t\overrightarrow{a}+(1-t)\overrightarrow{b}$ 和 $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$ 垂直，其中 t 為實數，則 $t=$

(A) $\frac{7}{10}$　(B) $\frac{\sqrt{5}}{3}$　(C) $\frac{3}{4}$　(D) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

【106 年歷屆試題.】

解答　A

解析　$\because$ $t\overrightarrow{a}+(1-t)\overrightarrow{b}$ 和 $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$ 垂直

$\therefore$ $\left(t\overrightarrow{a}+(1-t)\overrightarrow{b}\right)\cdot\left(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right)=0$

$\Rightarrow$ $t\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a}-t\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+(1-t)\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a}-(1-t)\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{b}=0$

$\Rightarrow$

$t\left|\overrightarrow{a}\right|^2\underbrace{-t\left(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\right)+(1-t)\left(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\right)}-(1-t)\left|\overrightarrow{b}\right|^2=0$

$\Rightarrow$ $t\left|\overrightarrow{a}\right|^2+\underbrace{(1-2t)\left(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\right)}-(1-t)\left|\overrightarrow{b}\right|^2=0$

$\Rightarrow$ $t\times1^2+(1-2t)\times(-2)-(1-t)\times\left(\sqrt{5}\right)^2=0$

$\Rightarrow$ $10t-7=0$　$\Rightarrow$　$t=\frac{7}{10}$

(　　) 25.若△ABC 中，$\overline{AB}=5$，$\overline{BC}=9$，$\overline{CA}=10$，則 $\cos(\angle A+\angle B)=$　(A) $-\frac{13}{15}$　(B) $-\frac{7}{15}$　(C) $\frac{7}{15}$　(D) $\frac{13}{15}$

【102 年歷屆試題.】

解答　A

解析　$\because$ $\angle A+\angle B+\angle C=180°$

$\therefore$ $\cos(\angle A+\angle B)=\cos(180°-\angle C)=-\cos\angle C=-\frac{9^2+10^2-5^2}{2\times9\times10}=-\frac{13}{15}$