1205 第一二冊　班級　　　　姓名　　　　座號

一、單選題 (25 題 每題 4 分 共 100 分)

(　　) 1.下列何者為 $x^3-6x^2+11x-6$ 的因式？ (A)$x+1$ (B)$x+2$ (C)$x-4$ (D)$x-3$

【091 年歷屆試題.】

解答　D

解析　令 $f(x)=x^3-6x^2+11x-6$

$\because\ f(1)=1-6+11-6=0$ $\quad\therefore\ f(x)$有因式$(x-1)$

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -6 & +11 & -6 & 1 \\ & +1 & -5 & +6 & \\ \hline 1 & -5 & +6, & 0 & \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x^2-5x+6)=(x-1)(x-2)(x-3)$

(　　) 2.在坐標平面上，滿足不等式$|x|\le y\le 8$ 的區域面積為何？ (A)16 (B)32 (C)64 (D)128

【094 年歷屆試題.】

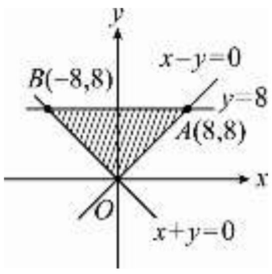
解答　C

解析　$\because\ |x|\le y\le 8$

$$\Rightarrow \begin{cases} |x|\le y \\ y\le 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y\le x\le y \\ y\le 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y\ge 0 \\ x-y\le 0 \\ y\le 8 \end{cases}$$

不等式所成區域如圖所示

（為△OAB）：



$\therefore$ 所成區域面積（即△OAB 面積）$=\dfrac{1}{2}\times 16\times 8=64$

(　　) 3.下列何者為多項式？ (A)$\dfrac{1}{x}+4$ (B)$\sqrt{2}x+8$ (C)$\dfrac{13}{5x-4}$ (D)$6\sqrt{x}+2$

【094 年歷屆試題.】

解答　B

解析　$\dfrac{1}{x}+4$ 及 $\dfrac{13}{5x-4}$ 的 x 在分母中出現，故不為 x 的多項式

又$6\sqrt{x}+2$ 的 x 出現在根號內，故不為 x 的多項式

$\therefore$ 只有 $\sqrt{2}x+8$ 為 x 的多項式

(　　) 4.設 $A(0,6)$、$B(-12,-24)$、$C(24,12)$為坐標平面上之三點，試問△ABC 之重心坐標為何？(A)(2,2)(B)(4, − 2)(C)$(9,-\dfrac{3}{2})$ (D)(18, − 6)

【095 年歷屆試題.】

解答　B

解析　$\because\ A(0,6)$、$B(-12,-24)$、$C(24,12)$

$\therefore$ △ABC 之重心坐標為

$$(\frac{0+(-12)+24}{3},\frac{6+(-24)+12}{3})=(4,-2)$$

(　　) 5.若在坐標平面上的平行四邊形 $ABCD$ 中，點 A、B、C 的坐標分別為(5,2)、(1,3)、(− 4,3)，則 D 點之坐標為何？ (A)(1,8) (B)(0,2) (C)(2,7) (D)(3,9)

【096 年歷屆試題.】

解答　B

解析　利用平行四邊形對角線互相平分

設 D 點坐標為(x,y)

又 $A(5,2)$、$B(1,3)$、$C(-4,3)$

$\because\ \overline{AC}$ 中點$=\overline{BD}$ 中點

$\Rightarrow (\dfrac{5+(-4)}{2},\dfrac{2+3}{2})=(\dfrac{1+x}{2},\dfrac{3+y}{2}) \quad\Rightarrow\quad x=0$，$y=2$

$\therefore\ D$ 點坐標為(0,2)

《另解》

設 D 點坐標為(x,y)

又知 $A(5,2)$、$B(1,3)$、$C(-4,3)$

$\Rightarrow\ x=5+(-4)-1=0 \quad\Rightarrow\quad y=2+3-3=2$

$\therefore\ D$ 點坐標為(0,2)

(　　) 6.已知$\left(x^3+x^2+kx+3\right)\times\left(2x^3-3x^2-5x+k\right)$的乘積中，$x^3$ 項的係數為 7，則 $k=$ (A)-3 (B)-4 (C)3 (D)4

【隨堂測驗.】

解答　A

解析　x^3 項的係數 $k-5-3k+6=7$

$\Rightarrow\ -2k=6 \quad\Rightarrow\quad k=-3$

(　　) 7.設 a、b、c、d、e、f 均為實數，若行列式$\begin{vmatrix} a & 1 & d \\ b & 1 & e \\ c & 1 & f \end{vmatrix}=2$，

則$\begin{vmatrix} 2a & -3 & 4d \\ 2b & -3 & 4e \\ -10c & 15 & -20f \end{vmatrix}=$ (A)120 (B) − 120 (C)240 (D) − 240

【096 年歷屆試題.】

解答　C

解析　$\begin{vmatrix} 2a & -3 & 4d \\ 2b & -3 & 4e \\ -10c & 15 & -20f \end{vmatrix}=2\times(-3)\times 4\times\begin{vmatrix} a & 1 & d \\ b & 1 & e \\ -5c & -5 & -5f \end{vmatrix}$

$=2\times(-3)\times 4\times(-5)\times\begin{vmatrix} a & 1 & d \\ b & 1 & e \\ c & 1 & f \end{vmatrix}$

$=2\times(-3)\times 4\times(-5)\times 2=240$

(　　) 8.設 $A(-13,-19)$、$B(x,y)$為平面上相異兩點。若向量 $\overrightarrow{AB}$ 與向量 $\overrightarrow{u}=(5,12)$ 同方向且$|\overrightarrow{AB}|=26$，則 $3x-4y=$ (A) − 103 (B) − 29 (C)29 (D)103

【100 年歷屆試題.】

解答　B

解析 $\overrightarrow{AB}=(x-(-13),y-(-19))=(x+13,y+19)$

$\because\ |\overrightarrow{AB}|=26$，$|\overrightarrow{u}|=\sqrt{5^2+12^2}=13$

且 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{u}$ 同方向，

$\therefore\ \overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{u}\ \Rightarrow\ (x+13\,,y+19)=2(5\,,12)=(10\,,24)$

$\Rightarrow\ x=-3$，$y=5$

因此 $3x-4y=3\times(-3)-4\times5=-29$

(　　)9.已知△ABC 中，$\overline{AB}=5$，$\overline{BC}=7$，$\overline{AC}=8$，則下列各內積中，何者為最大？ (A) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ (B) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}$ (C) $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$ (D) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$

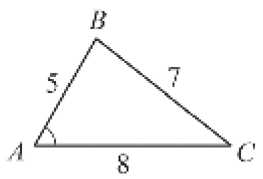
【093 年歷屆試題.】

解答 C

解析 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{\overline{AC}^2+\overline{AB}^2-\overline{BC}^2}{2\overline{AC}\times\overline{AB}}$

$\Rightarrow\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos A=\overline{AB}\times\overline{AC}\times\dfrac{\overline{AC}^2+\overline{AB}^2-\overline{BC}^2}{2\overline{AC}\times\overline{AB}}$

$=\dfrac{1}{2}(\overline{AC}^2+\overline{AB}^2-\overline{BC}^2)=\dfrac{1}{2}(8^2+5^2-7^2)=20$



同理 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}=\dfrac{1}{2}(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-\overline{AC}^2)=\dfrac{1}{2}(5^2+7^2-8^2)=5$

$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\dfrac{1}{2}(\overline{BC}^2+\overline{AC}^2-\overline{AB}^2)=\dfrac{1}{2}(7^2+8^2-5^2)=44$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=(-\overrightarrow{BA})\cdot\overrightarrow{BC}=-(\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA})=-5$

$\therefore\ \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$ 為最大

(　　)10.在坐標平面上，若△ABC 之三頂點坐標分別為 $A(2,0)$、$B(4,0)$與 $C(4,3)$，則△ABC 之三邊上共有多少點與原點的距離恰為整數值？ (A)2 個 (B)4 個 (C)6 個 (D)8 個

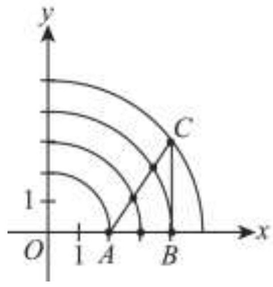
【099 年歷屆試題.】

解答 C

解析 以原點為圓心，作出半徑為 2、3、4、5 的圓

這些圓與△ABC 的邊長共有 6 個交點，

也就是△ABC 之三邊上共有 6 個點與原點的距離恰為整數值



故選(C)

(　　)11.設 $\overrightarrow{a}=(4,3)$，$\overrightarrow{b}=(x,y)$ 為平面上兩向量，且 $x^2+y^2=40$，則此二向量內積 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ 的最大值為何？

(A)$10\sqrt{10}$ (B)$12\sqrt{10}$ (C)$14\sqrt{10}$ (D)$16\sqrt{10}$

【098 年歷屆試題.】

解答 A

解析 $\overrightarrow{a}=(4,3)\ \Rightarrow\ |\overrightarrow{a}|=\sqrt{4^2+3^2}=5$

$\overrightarrow{b}=(x,y)\ \Rightarrow\ |\overrightarrow{b}|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

設 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的夾角為 θ

則

$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta=5\times2\sqrt{10}\times\cos\theta=10\sqrt{10}\cos\theta\le10\sqrt{10}$

（$\because\ -1\le\cos\theta\le1$）

故 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ 的最大值為 $10\sqrt{10}$

《另解》

$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=(4,3)\cdot(x,y)=4x+3y$

由柯西不等式：

$(4^2+3^2)(x^2+y^2)\ge(4x+3y)^2\ \Rightarrow\ 25\times40\ge(4x+3y)^2$

$\Rightarrow\ (4x+3y)^2-1000\le0$

$\Rightarrow\ [(4x+3y)+10\sqrt{10}][(4x+3y)-10\sqrt{10}]\le0$

$\Rightarrow\ -10\sqrt{10}\le4x+3y\le10\sqrt{10}$

故 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ 的最大值為 $10\sqrt{10}$

(　　)12.平面上四點 $A(1\,,1)$、$B(a\,,2)$、$C(b\,,-1)$、$D(0\,,-2)$，其中 b 為正數，若 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 互相平行，且 $\overline{BD}$ 與 $\overline{AC}$ 互相垂直，求 $a+2b$ 之值為何？ (A)7 (B)8 (C)9 (D)10

【101 年歷屆試題.】

解答 D

解析 直線 AB 的斜率 $m_{AB}=\dfrac{1-2}{1-a}=\dfrac{-1}{1-a}$，直線 CD 的斜率

$m_{CD}=\dfrac{-1-(-2)}{b-0}=\dfrac{1}{b}$，

直線 BD 的斜率 $m_{BD}=\dfrac{2-(-2)}{a-0}=\dfrac{4}{a}$，直線 AC 的斜率

$m_{AC}=\dfrac{1-(-1)}{1-b}=\dfrac{2}{1-b}$，

$\because$ $\overline{AB}//\overline{CD}$ $\therefore$ $m_{AB}=m_{CD}$

$\Rightarrow$ $\dfrac{-1}{1-a}=\dfrac{1}{b}$ $\Rightarrow$ $a-b=1$……①

$\because$ $\overline{BD}\perp\overline{AC}$ $\therefore$ $m_{BD}\times m_{AC}=-1$

$\Rightarrow$ $\dfrac{4}{a}\times\dfrac{2}{1-b}=-1$ $\Rightarrow$ $a(1-b)=-8$……②

由①，$a=1+b$ 代入②

則 $(1+b)(1-b)=-8$ $\Rightarrow$ $1-b^2=-8$ $\Rightarrow$ $b^2=9$

$\Rightarrow$ $b=\pm3$（負不合） $\Rightarrow$ $a=1+3=4$

故 $a+2b=4+2\times3=10$

(　　　)13.設 A、B、C 為一圓之圓周上三點，若 $\overline{AB}=4$、$\overline{BC}=6$、$\overline{CA}=8$，則該圓之面積為何？ (A)$\dfrac{256}{15}\pi$ (B)$\dfrac{256}{13}\pi$ (C)$\dfrac{81}{4}\pi$ (D)$\dfrac{81}{2}\pi$

【099 年歷屆試題.】

解答 A

解析 令圓的半徑為 R

由餘弦定理知：

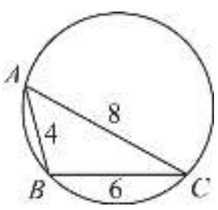
$\cos A=\dfrac{\overline{AB}^2+\overline{CA}^2-\overline{BC}^2}{2\overline{AB}\times\overline{CA}}=\dfrac{4^2+8^2-6^2}{2\times4\times8}=\dfrac{11}{16}$

則 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-(\dfrac{11}{16})^2}=\dfrac{3\sqrt{15}}{16}$

由正弦定理知：$\dfrac{\overline{BC}}{\sin A}=2R$ $\Rightarrow$ $\dfrac{6}{\frac{3\sqrt{15}}{16}}=2R$ $\Rightarrow$

$R=\dfrac{16}{\sqrt{15}}$

因此圓面積 $=\pi R^2=\pi\times(\dfrac{16}{\sqrt{15}})^2=\dfrac{256}{15}\pi$



故選(A)

(　　　)14.設向量 $\vec{a}=(3,4)$，向量 $\vec{b}//\vec{a}$，且 $\vec{a}\cdot\vec{b}=-50$，則 $|2\vec{a}+3\vec{b}|=$ (A)20 (B)40 (C)60 (D)80

【102 年歷屆試題.】

解答 A

解析 $\because$ $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 互相平行且 $\vec{a}\cdot\vec{b}=-50<0$

$\therefore$ $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 互為反向，即夾角為 $180°$

$|\vec{a}|=\sqrt{3^2+4^2}=5$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos180°=5\times|\vec{b}|\times(-1)=-5|\vec{b}|=-50$

$\Rightarrow$ $|\vec{b}|=10$

$|2\vec{a}+3\vec{b}|^2=4|\vec{a}|^2+12\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2=4\times5^2+12\times(-50)+9$

故 $|2\vec{a}+3\vec{b}|=\sqrt{400}=20$

〈另解〉

$\because$ $\vec{b}//\vec{a}$ $\therefore$ 可設 $\vec{b}=t\vec{a}$，其中 t 為實數

則 $\vec{b}=t(3,4)=(3t,4t)$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=(3,4)\cdot(3t,4t)=3\times3t+4\times4t=25t$

$\because$ $\vec{a}\cdot\vec{b}=-50$ $\therefore$ $25t=-50$ $\Rightarrow$ $t=-2$

則 $\vec{b}=(3\times(-2),4\times(-2))=(-6,-8)$

而

$2\vec{a}+3\vec{b}=2(3,4)+3(-6,-8)=(6,8)+(-18,-24)=(-12,-16)$

故 $|2\vec{a}+3\vec{b}|=\sqrt{(-12)^2+(-16)^2}=\sqrt{400}=20$

(　　　)15.已知直線方程式 $L：2x+y-1=0$，$L_1：y=m_1x+2$，$L_2：y=m_2x-3$，若 $L_1//L$ 且 $L_2\perp L$，則 $m_1-m_2=$？ (A)-3 (B)$-\dfrac{5}{2}$ (C)$-\dfrac{3}{2}$ (D)-1

【隨堂測驗.】

解答 B

解析 $m_L=-\dfrac{2}{1}=-2$

$\begin{cases}L_1//L \Rightarrow m_1=m_L=-2\\ L_2\perp L \Rightarrow m_2\cdot m_L=-1 \Rightarrow m_2=\dfrac{1}{2}\end{cases}$

$\therefore$ $m_1-m_2=-2-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{5}{2}$

(　　　)16.若點 $(a+b,ab)$ 在第二象限內，則點 (a,b) 在第幾象限？ (A)第一象限 (B)第二象限 (C)第三象限 (D)第四象限

【隨堂測驗.】

解答 C

解析 $\begin{cases} a+b<0 & \Rightarrow \quad a, b \text{ 之中必有負數} \\ ab>0 & \Rightarrow \quad ab \text{ 同號} \end{cases}$

$\Rightarrow \quad a<0$ 且 $b<0$

$\therefore \quad (a, b) \in \text{III}$

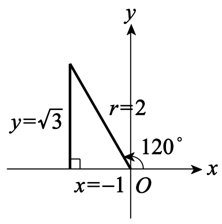
(　　　) 17.求 $\cos 1560°$ 之值？　(A)1　(B)$\frac{1}{2}$　(C)$-\frac{1}{2}$　(D)-1

【隨堂測驗.】

解答 C

解析 $\because \quad 1560° = 4 \times 360° + 120°$

$\therefore \quad \cos 1560° = \cos 120° = \frac{-1}{2}$



(　　　) 18.已知 $i=\sqrt{-1}$ 。若 $z=\cos 78° + i\sin 78°$，則 $z^{15}=$　(A)$-i$　(B)-1　(C)i　(D)1

【100 年歷屆試題.】

解答 C

解析 $z^{15} = (\cos 78° + i\sin 78°)^{15} = \cos(15 \times 78°) + i\sin(15 \times 78°)$

$= \cos 1170° + i\sin 1170° = \cos(3 \times 360° + 90°) + i\sin(3 \times 360° + 90°)$

$= \cos 90° + i\sin 90° = 0 + i = i$

(　　　) 19.設一扇形的半徑為 5，圓心角為 $72°$，則此扇形的面積為　(A)$\frac{5}{2}\pi$　(B)5π　(C)10π　(D)$\frac{15}{2}\pi$

【隨堂講義補充題.】

解答 B

解析 $r=5$，$\theta = 72° = \frac{2}{5}\pi$

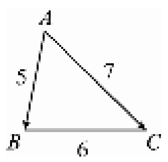
$\frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2} \times 5^2 \times \frac{2}{5}\pi = 5\pi$

(　　　) 20.△ABC 中，$\overline{AB}=5$，$\overline{BC}=6$，$\overline{CA}=7$，則 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} =$　(A)19　(B)15　(C)13　(D)11

【隨堂講義補充題.】

解答 A

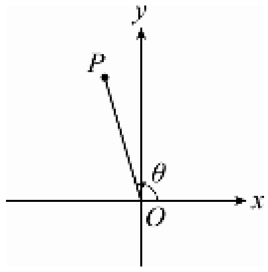
解析



$\cos A = \frac{5^2+7^2-6^2}{2 \times 5 \times 7} = \frac{19}{35}$

$\therefore \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 5 \times 7 \times \frac{19}{35} = 19$

(　　　) 21.如圖，$\overline{OP}=15$，$\tan\theta = -\frac{24}{7}$，則 P 點坐標為



(A)$\left(\frac{7}{5}, -\frac{24}{5}\right)$　(B)$\left(-\frac{7}{5}, \frac{24}{5}\right)$　(C)$\left(\frac{21}{5}, -\frac{72}{5}\right)$　D)$\left(-\frac{21}{5}, \frac{72}{5}\right)$

【隨堂講義補充題.】

解答 D

解析 設 $P=(x, y)$，其中 $x<0$，$y>0$

$\tan\theta = -\frac{24}{7} \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{x} = -\frac{24}{7} \quad \Rightarrow \quad x:y = -7:24$

$\Rightarrow \quad x:y:15 = -7:24:25$

$\therefore \quad x = 15 \times \left(\frac{-7}{25}\right) = \frac{-21}{5}$

$y = 15 \times \frac{24}{25} = \frac{72}{5}$

$\Rightarrow \quad P = \left(-\frac{21}{5}, \frac{72}{5}\right)$

(　　　) 22.下列何者為一元二次不等式？　(A)$x-2>0$　(B)$x^2-x-2<0$　(C)$x+y-1>0$　(D)$|x| \le 4$

【隨堂測驗.】

解答 B

解析 (A)一元一次不等式

(C)二元一次不等式

(D)絕對值不等式

(　　　) 23.設 $\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & k \end{vmatrix} = 6$，$\begin{vmatrix} a & d & l \\ b & e & m \\ c & f & n \end{vmatrix} = -5$，則行列式 $\begin{vmatrix} 3a & -2d & 4g+5l \\ 3b & -2e & 4h+5m \\ 3c & -2f & 4k+5n \end{vmatrix}$ 的值為　(A)3　(B)4　(C)5　(D)6

【隨堂講義補充題.】

解答 D

解析 所求

$= \begin{vmatrix} 3a & -2d & 4g \\ 3b & -2e & 4h \\ 3c & -2f & 4k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3a & -2d & 5l \\ 3b & -2e & 5m \\ 3c & -2f & 5n \end{vmatrix}$

$= -24\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & k \end{vmatrix} - 30\begin{vmatrix} a & d & l \\ b & e & m \\ c & f & n \end{vmatrix}$

$= -24 \times 6 - 30 \times (-5) = 6$

(　　　) 24.設 $\sec\theta + \csc\theta = 1$，求 $\sec\theta\csc\theta$ 之值為　(A)$\sqrt{2}+1$　(B)$\sqrt{2}-1$　(C)$-\sqrt{2}-1$　(D)$-\sqrt{2}+1$

【105 年歷屆試題.】

解答 C

解析 $\sec\theta+\csc\theta=1 \Rightarrow \dfrac{1}{\cos\theta}+\dfrac{1}{\sin\theta}=1 \Rightarrow$

$\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}=1$

$\Rightarrow \sin\theta+\cos\theta=\sin\theta\cos\theta \overset{平方}{\Rightarrow}$

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=(\sin\theta\cos\theta)^2$

$\Rightarrow 1+2\sin\theta\cos\theta=(\sin\theta\cos\theta)^2\cdots$①

令$t=\sin\theta\cos\theta$

（$\because \sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{2}\sin 2\theta$，且$-1\le\sin 2\theta\le 1$

$\therefore -\dfrac{1}{2}\le\sin\theta\cos\theta\le\dfrac{1}{2}$，即$-\dfrac{1}{2}\le t\le\dfrac{1}{2}$）

①式：$1+2t=t^2 \Rightarrow t^2-2t-1=0$

$\Rightarrow t=\dfrac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\times1\times(-1)}}{2\times1}=\dfrac{2\pm2\sqrt{2}}{2}=1\pm\sqrt{2}$

$\because -\dfrac{1}{2}\le t\le\dfrac{1}{2}$

$\therefore t=1-\sqrt{2}$，即$\sin\theta\cos\theta=1-\sqrt{2}$

所求

$\sec\theta\csc\theta=\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{1}{1-\sqrt{2}}=\dfrac{1\times(1+\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2})\times(1+\sqrt{2})}$

$=-\sqrt{2}-1$

(　　)25.若$\triangle ABC$中，$\overline{AB}=5$，$\overline{BC}=9$，$\overline{CA}=10$，則$\cos(\angle A+\angle B)=$ (A)$-\dfrac{13}{15}$ (B)$-\dfrac{7}{15}$ (C)$\dfrac{7}{15}$ (D)$\dfrac{13}{15}$

【102 年歷屆試題.】

解答 A

解析 $\because \angle A+\angle B+\angle C=180°$

$\therefore \cos(\angle A+\angle B)=\cos(180°-\angle C)=-\cos\angle C=-\dfrac{9^2+10^2-5^2}{2\times9\times10}=-\dfrac{13}{15}$