1125 第二冊

班級　　　　姓名　　　　　座號

一、單選題 (25 題 每題 4 分 共 100 分)

(　　　) 1.設 x、y、k 均為實數，若

$|x+1|+|2x-y+4|+|x+3y+k|=0$，則 k 之值為何？

(A)3　(B)1　(C)-4　(D)-5

【103 年歷屆試題.】

解答　D

解析　從題意可知

$$\begin{cases} x+1=0\cdots\cdots① \\ 2x-y+4=0\cdots\cdots② \\ x+3y+k=0\cdots\cdots③ \end{cases}$$

由①得 $x=-1$

$x=-1$ 代入②得 $2(-1)-y+4=0 \Rightarrow y=2$

$x=-1$、$y=2$ 代入③得 $-1+3\times2+k=0 \Rightarrow k=-5$

(　　　) 2.設$(x+2)$為 $f(x)=x^4+x^3-2x^2+ax+2$ 的因式，則 $a=$

(A)-9　(B)-1　(C)1　(D)9

【092 年歷屆試題.】

解答　C

解析　$\because$ $x+2$ 為 $f(x)$的因式

$\Rightarrow f(-2)=0 \Rightarrow (-2)^4+(-2)^3-2\times(-2)^2+a\times(-2)+2=0$

$\Rightarrow 16-8-8-2a+2=0$

$\therefore a=1$

(　　　) 3.已知 $\cos60^\circ=4\cos^3 20^\circ-3\cos20^\circ$，則多項式 $4x^3-3x$ 除以 $x-\cos20^\circ$的餘式為何？　(A)0　(B)$\frac{1}{2}$　(C)$\frac{\sqrt{3}}{2}$

(D)1

【096 年歷屆試題.】

解答　B

解析　令 $f(x)=4x^3-3x$

由餘式定理知 $f(x)$除以 $x-\cos20^\circ$的餘式為

$$f(\cos20^\circ)=4\cos^3 20^\circ-3\cos20^\circ=\cos60^\circ=\frac{1}{2}$$

(　　　) 4.設 x、y、z 為整數，且

$2|x+y|+3|x-y-4|+5|2x+3y-z|=4$，則 z 可為下列何者？　(A)0　(B)3　(C)5　(D)11

【106 年歷屆試題.】

解答　B

解析　$\because$ x、y、z 為整數

$\therefore$ $x+y$、$x-y-4$、$2x+3y-z$ 也是整數

$2|x+y|+3|x-y-4|+5|2x+3y-z|=4$

而 $2\times2+3\times0+5\times0=4$

$$\Rightarrow \begin{cases} |x+y|=2 \\ |x-y-4|=0 \\ |2x+3y-z|=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=\pm2 \\ x-y-4=0 \\ 2x+3y-z=0 \end{cases}$$

(1)$\begin{cases} x+y=2\cdots\cdots① \\ x-y-4=0\cdots\cdots② \\ 2x+3y-z=0\cdots\cdots③ \end{cases}$

①+②：$2x-4=2 \Rightarrow x=3$

$x=3$ 代入①：$3+y=2 \Rightarrow y=-1$

$x=3$、$y=-1$ 代入③：

$2\times3+3\times(-1)-z=0 \Rightarrow z=3$

(2)$\begin{cases} x+y=-2\cdots\cdots④ \\ x-y-4=0\cdots\cdots⑤ \\ 2x+3y-z=0\cdots\cdots⑥ \end{cases}$

④+⑤：$2x-4=-2 \Rightarrow 2x=2 \Rightarrow x=1$

$x=1$ 代入④：$1+y=-2 \Rightarrow y=-3$

$x=1$、$y=-3$ 代入⑥：$2\times1+3\times(-3)-z=0 \Rightarrow$

$z=-7$

由(1)和(2)可知：$z=3$ 或 -7

故選(B)

(　　　) 5.若 $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ x-1 & 2 & 4 \\ x-2 & 4 & 7 \end{vmatrix}=0$，則 $x=$　(A)-1　(B)0　(C)1　(D)2

【092 年歷屆試題.】

解答　A

解析

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ x-1 & 2 & 4 \\ x-2 & 4 & 7 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ x-1 & 2 & 0 \\ x-2 & 4 & -1 \end{vmatrix}=0 \text{（依第三行降階）}$$

$\times(-2)$

$\Rightarrow (-1)\times\begin{vmatrix} x & 1 \\ x-1 & 2 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow (-1)\times[2x-(x-1)]=0$

$\therefore x=-1$

《註》本題亦可由三階行列式直接展開來求 x 值

(　　　) 6.設 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & 1 & 2 \\ 3 & x & 1 \end{vmatrix}=36$ 的解為 a 與 b，則 $a+b=$　(A)$\frac{4}{3}$　(B)4

(C)$\frac{20}{3}$　(D)$\frac{28}{3}$

【093 年歷屆試題.】

解答　A

解析　$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & 1 & 2 \\ 3 & x & 1 \end{vmatrix}=36 \Rightarrow 1+3x^2+12-9-2x-2x=36 \Rightarrow$

$3x^2-4x-32=0$

$\because$ 其解為 a 與 b

由二次方程式根與係數關係知 $a+b=-\frac{(-4)}{3}=\frac{4}{3}$

(　　)7.設 k 為自然數，若行列式 $\begin{vmatrix}1-k & 2 & 3\\ 1 & 2-k & 3\\ 1 & 2 & 3-k\end{vmatrix}=0$，則 k = (A)3 (B)4 (C)5 (D)6

【094 年歷屆試題.】

解答 D

解析

$$\begin{vmatrix}1-k & 2 & 3\\ 1 & 2-k & 3\\ 1 & 2 & 3-k\end{vmatrix}=0 \Rightarrow \begin{vmatrix}6-k & 2 & 3\\ 6-k & 2-k & 3\\ 6-k & 2 & 3-k\end{vmatrix}=0$$

$\times 1$　$\times 1$

$$\Rightarrow (6-k)\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2-k & 3\\ 1 & 2 & 3-k\end{vmatrix}=0$$

$\times(-1)$　$\times(-1)$

$$\Rightarrow (6-k)\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -k & 0\\ 0 & 0 & -k\end{vmatrix}=0 \Rightarrow (6-k)k^2=0$$

但已知 k 為自然數

$\therefore\ k=6$

(　　)8.設 a、b、c 為實數，若 $\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{vmatrix}=12$ 且 $\begin{vmatrix}1 & a & a^3\\ 1 & b & b^3\\ 1 & c & c^3\end{vmatrix}=156$，則 $\begin{vmatrix}1 & a+1 & a^2(a+1)\\ 1 & b+1 & b^2(b+1)\\ 1 & c+1 & c^2(c+1)\end{vmatrix}=$ (A)13 (B)144 (C)168 (D)1872

【095 年歷屆試題.】

解答 C

解析

$$\begin{vmatrix}1 & a+1 & a^2(a+1)\\ 1 & b+1 & b^2(b+1)\\ 1 & c+1 & c^2(c+1)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & a & a^3+a^2\\ 1 & b & b^3+b^2\\ 1 & c & c^3+c^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & a & a^3\\ 1 & b & b^3\\ 1 & c & c^3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{vmatrix}=156+12=168$$

$\times(-1)$

(　　)9.若 x^2+x+1 為 x^3+ax^2+bx+2 的因式，則下列何者正確？ (A)$a>b$ (B)$a^2+b^2=10$ (C)$a-b=-2$ (D)$a+b=6$

【101 年歷屆試題.】

解答 D

解析 先以 x^2+x+1 去除 x^3+ax^2+bx+2：

$$\begin{array}{r|l} & 1+(a-1)\\ \hline 1+1+1 & 1 + a + b + 2\\ & 1 + 1 + 1\\ \hline & (a-1)+(b-1)+2\\ & (a-1)+(a-1)+(a-1)\\ \hline & (b-a)+(3-a)\end{array}$$

餘式為$(b-a)x+(3-a)$

$\because\ x^2+x+1$ 為 x^3+ax^2+bx+2 的因式 $\therefore$ 餘式為 0

即 $b-a=0$ 且 $3-a=0 \Rightarrow a=3$，$b=3$

(A) $a=b$

(B) $a^2+b^2=3^2+3^2=18$

(C) $a-b=3-3=0$

(D) $a+b=3+3=6$

(　　)10.已知 m、n 為實數，$Q(x)$為二次多項式。若 $x^4-mx^3-x^2-5x+n=(x^2-3x+2)Q(x)$，則 $2m+n=$ (A)-6 (B)-2 (C)4 (D)8

【102 年歷屆試題.】

解答 D

解析 令 $f(x)=x^4-mx^3-x^2-5x+n$

$\because\ f(x)=(x^2-3x+2)Q(x)=(x-1)(x-2)Q(x)$

$\therefore\ x-1$ 與 $x-2$ 均為 $f(x)$的因式

$\Rightarrow\ f(1)=0$，$f(2)=0$

$f(1)=1-m-1-5+n=0 \Rightarrow -m+n=5$……①

$f(2)=16-8m-4-10+n=0 \Rightarrow -8m+n=-2$……②

①－② $7m=7 \Rightarrow m=1$

$m=1$ 代入① $-1+n=5 \Rightarrow n=6$

故 $2m+n=2\times1+6=8$

(　　)11.已知 A、B、C 為常數，且對任意 x 均滿足 $\dfrac{3x^2+9x-3}{(x-1)(x+2)^2}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+2}+\dfrac{C}{(x+2)^2}$，求 B 之值為 (A)-1 (B)0 (C)1 (D)2

【105 年歷屆試題.】

解答 D

解析 原式等號的兩側同乘以$(x-1)(x+2)^2$：

$$3x^2+9x-3=A(x+2)^2+B(x-1)(x+2)+C(x-1)$$

$$=A(x^2+4x+4)+B(x^2+x-2)+C(x-1)$$

$$=(A+B)x^2+(4A+B+C)x+(4A-2B-C)$$

則 $\begin{cases}A+B=3\cdots\cdots①\\ 4A+B+C=9\cdots\cdots②\\ 4A-2B-C=-3\cdots\cdots③\end{cases}$

②+③：$8A-B=6$……④

①+④：$9A=9 \Rightarrow A=1$

$A=1$代入①：$1+B=3 \Rightarrow B=2$

(　　)12.設 k 為實數，若任意實數 x 均使 kx^2-2x+k 恆為正數，

則 k 之範圍為何？ (A)$k>1$ (B)$0<k<1$ (C)$-1<k<0$ (D)$k<-1$

【094 年歷屆試題.】

解答 A

解析 ∵ kx^2-2x+k 恆為正數

$$\Rightarrow \begin{cases} k>0 \\ (-2)^2-4\times k\times k<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k>0 \\ 4k^2-4>0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k>0 \\ (k+1)(k-1)>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k>0 \\ k>1 \text{ 或 } k<-1 \end{cases}$$

∴ k 的範圍為 $k>1$

( ) 13.若行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=2$，則 $\begin{vmatrix} a_1 & c_1+a_1 & b_1-2c_1 \\ a_2 & c_2+a_2 & b_2-2c_2 \\ a_3 & c_3+a_3 & b_3-2c_3 \end{vmatrix}=$

(A)-4 (B)-2 (C)2 (D)4

【104 年歷屆試題.】

解答 B

解析

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1+a_1 & b_1-2c_1 \\ a_2 & c_2+a_2 & b_2-2c_2 \\ a_3 & c_3+a_3 & b_3-2c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1-2c_1 \\ a_2 & c_2 & b_2-2c_2 \\ a_3 & c_3 & b_3-2c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=-2$$

( ) 14.已知 $i=\sqrt{-1}$，且 a、b 為實數，若 $\dfrac{1-3i}{1+i}=a+bi$，則 $a+b=$ (A)-3 (B)-1 (C)1 (D)3

【091 年歷屆試題.】

解答 A

解析 由題目中

$$\frac{1-3i}{1+i}=\frac{(1-3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{1-i-3i+3i^2}{1^2-i^2}=\frac{1-4i-3}{1+1}=\frac{-2-4i}{2}=-1-2i=a+bi$$

∴ $a=-1$，$b=-2$

故得 $a+b=-3$

( ) 15.已知 $i=\sqrt{-1}$，且 a、b 均為實數。若 $1-\sqrt{3}i$ 為方程式 $x^3+3x^2+ax+b=0$ 的一根，則 $a+b=$ (A)-4 (B)-2 (C)8 (D)14

【098 年歷屆試題.】

解答 D

解析 $1-\sqrt{3}i$ 為 $x^3+3x^2+ax+b=0$ 的一根，且 a、b 均為實數

$\Rightarrow$ $1+\sqrt{3}i$ 也是 $x^3+3x^2+ax+b=0$ 的根

而 $[x-(1-\sqrt{3}i)][x-(1+\sqrt{3}i)]=x^2-2x+4$

則

$$x^3+3x^2+ax+b=(x^2-2x+4)(x+\frac{b}{4})$$

$$=x^3+(-2+\frac{b}{4})x^2+(4-\frac{b}{2})x+b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2+\dfrac{b}{4}=3 \\ 4-\dfrac{b}{2}=a \end{cases} \Rightarrow b=20，a=-6$$

故 $a+b=-6+20=14$

《另解》

$1-\sqrt{3}i$ 為實係數方程式，$x^3+3x^2+ax+b=0$ 之一根，

則 $1+\sqrt{3}i$ 為其另一根

設 α 為方程式的第三根

則三根和

$$(1-\sqrt{3}i)+(1+\sqrt{3}i)+\alpha=-\frac{3}{1}=-3 \Rightarrow \alpha=-5$$

∴

$$x^3+3x^2+ax+b=[x-(1-\sqrt{3}i)][x-(1+\sqrt{3}i)][x-(-5)]$$
$$=x^3+3x^2-6x+20$$

$\Rightarrow$ $a=-6$，$b=20$

故 $a+b=-6+20=14$

( ) 16.設 a、b 為實數且 $i=\sqrt{-1}$，若 $2+\sqrt{3}i$ 為 $2x^2+ax+b=0$ 之一根，則 $a+b=$ (A)1 (B)3 (C)6 (D)14

【095 年歷屆試題.】

解答 C

解析 $2+\sqrt{3}i$ 為 $2x^2+ax+b=0$ 之一根

又 a、b 為實數 $\Rightarrow$ 另一根為 $2-\sqrt{3}i$

由根與係數關係知 $\begin{cases} (2+\sqrt{3}i)+(2-\sqrt{3}i)=-\dfrac{a}{2} \\ (2+\sqrt{3}i)(2-\sqrt{3}i)=\dfrac{b}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow$ $4=-\dfrac{a}{2}$ 且 $7=\dfrac{b}{2}$ $\Rightarrow$ $a=-8$ 且 $b=14$

∴ $a+b=6$

( ) 17.已知 $i=\sqrt{-1}$，a 為複數，若二次方程式 $x^2-ax-4+7i=0$ 有一根為 $2-i$，則另一根為何？ (A)$2-3i$ (B)$-3+2i$ (C)$2+i$ (D)$2+3i$

【092 年歷屆試題.】

解答 B

解析 設另一根為 α，則 $\alpha(2-i)=-4+7i$

$$\Rightarrow \alpha=\frac{-4+7i}{2-i}=\frac{(-4+7i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{-15+10i}{5}=-3+2i$$

∴ 另一根為 $-3+2i$

《註》本題並非實係數二次方程式，故兩根不一定共軛存在

( ) 18.令 $i=\sqrt{-1}$。若 $1+i$ 為方程式 $2x^2+kx+6+2i=0$ 的一根，則 $k=$ (A)-6 (B)-4 (C)$-5+i$ (D)$-10+2i$

【099 年歷屆試題.】

解答 A

解析 ∵ $1+i$ 為 $2x^2+kx+6+2i=0$ 的根 ∴ $2(1+i)^2+k(1+i)+6+2i=0$

$\Rightarrow\ 2(2i)+k(1+i)+6+2i=0 \quad \Rightarrow \quad k(1+i)=-6-6i$

$\Rightarrow \quad k=\dfrac{-6-6i}{1+i}=\dfrac{-6(1+i)}{1+i}=-6$

故選(A)

(　　) 19.設 $i=\sqrt{-1}$，已知 $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 且 $\omega^2+\omega+1=0$，試求 $(2-\omega)(2-\omega^2)=$ (A)5 (B)7 (C)$3\sqrt{3}i$ (D)$6\sqrt{3}i$

【097 年歷屆試題.】

解答 B

解析 ∵ $\omega^2+\omega+1=0$（即 $\omega^2+\omega=-1$）

$\Rightarrow \quad (\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0 \quad \Rightarrow \quad \omega^3-1=0 \quad \Rightarrow \quad \omega^3=1$

∴ $(2-\omega)(2-\omega^2)=4-2\omega^2-2\omega+\omega^3=4-2(\omega^2+\omega)+\omega^3$

$=4-2\times(-1)+1=7$

(　　) 20.已知 $i=\sqrt{-1}$，則下列何者為複數 $4+4\sqrt{3}i$ 的一個平方根？ (A)$\sqrt{6}-\sqrt{2}i$ (B)$\sqrt{6}+\sqrt{2}i$ (C)$-\sqrt{6}+\sqrt{2}i$ (D)$\sqrt{3}+\sqrt{2}i$

【093 年歷屆試題.】

解答 B

解析 $4+4\sqrt{3}i=8(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)=8(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$

$\Rightarrow \quad 4+4\sqrt{3}i$ 的平方根為

$z_k=\sqrt{8}(\cos\dfrac{2k\pi+\frac{\pi}{3}}{2}+i\sin\dfrac{2k\pi+\frac{\pi}{3}}{2})$（其中 $k=0,1$）

即 $z_0=\sqrt{8}(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})=2\sqrt{2}(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)=\sqrt{6}+\sqrt{2}i$

$z_1=\sqrt{8}(\cos\frac{7}{6}\pi+i\sin\frac{7}{6}\pi)=2\sqrt{2}(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i)=-\sqrt{6}-\sqrt{2}i$

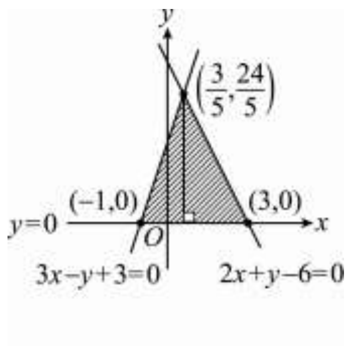
∴ $4+4\sqrt{3}i$ 的平方根為 $\sqrt{6}+\sqrt{2}i$ 及 $-\sqrt{6}-\sqrt{2}i$

(　　) 21.在坐標平面上，滿足不等式方程組 $\begin{cases}2x+y-6\le 0\\3x-y+3\ge 0\\y\ge 0\end{cases}$ 的區域，其面積為何？ (A)$\frac{22}{5}$ (B)$\frac{32}{5}$ (C)$\frac{42}{5}$ (D)$\frac{48}{5}$

【098 年歷屆試題.】

解答 D

解析 滿足不等式方程組的區域如圖所示：



面積 $=\frac{1}{2}\times[3-(-1)]\times\frac{24}{5}=\frac{48}{5}$

(　　) 22.下列何者為不等式 $|x+5|\ge|2-x|$ 的解？ (A)$-\frac{3}{2}\le x\le 2$ (B)$x\ge-\frac{3}{2}$ (C)$-5\le x\le 0$ (D)$x\ge-5$

【096 年歷屆試題.】

解答 B

解析 ∵ $|x+5|\ge|2-x| \quad \Rightarrow \quad (x+5)^2-(2-x)^2\ge 0$

$\Rightarrow \quad [(x+5)+(2-x)]\times[(x+5)-(2-x)]\ge 0 \quad \Rightarrow \quad 7(2x+3)\ge 0$

∴ $x\ge-\frac{3}{2}$

(　　) 23.求 $\left(\sqrt[3]{3}-2\right)\left(\sqrt[3]{9}+2\sqrt[3]{3}+4\right)$ 之值為何？ (A)−5 (B)−3 (C)8 (D)11

【103 年歷屆試題.】

解答 A

解析 所求

$=\left(\sqrt[3]{3}-2\right)\left[\left(\sqrt[3]{3}\right)^2+\sqrt[3]{3}\times 2+2^2\right]$

$=\left(\sqrt[3]{3}\right)^3-2^3=3-8=-5$

(　　) 24.下列何者為方程式 $(x+2)(x+3)(x-4)(x-5)=60$ 的正整數解？ (A)1 (B)2 (C)3 (D)4

【097 年歷屆試題.】

解答 C

解析 $(x+2)(x+3)(x-4)(x-5)=60 \quad \Rightarrow \quad [(x+2)(x-4)][(x+3)(x-5)]=60$

$\Rightarrow \quad (x^2-2x-8)(x^2-2x-15)-60=0$

令 $y=x^2-2x \quad \Rightarrow \quad (y-8)(y-15)-60=0 \quad \Rightarrow \quad y^2-23y+60=0$

$\Rightarrow \quad (y-3)(y-20)=0 \quad \Rightarrow \quad y=3$ 或 $y=20$

(1)當 $y=3 \quad \Rightarrow \quad 3=x^2-2x \quad \Rightarrow \quad x^2-2x-3=0 \quad \Rightarrow \quad (x+1)(x-3)=0$

∴ $x=3$ 或 $x=-1$

(2)當 $y=20 \quad \Rightarrow \quad 20=x^2-2x \quad \Rightarrow \quad x^2-2x-20=0$

$\Rightarrow \quad x=\dfrac{2\pm\sqrt{84}}{2}=\dfrac{2\pm2\sqrt{21}}{2}=1\pm\sqrt{21}$

由(1)、(2)知方程式的正整數解為 3

(　　　) 25.試問 3^{11} 除以 3^2+3+1 之餘數為何？　(A)1　(B)3　(C)9　(D)12

【096 年歷屆試題.】

解答　C

解析　$3^{11}=3^2(3^9-1)+3^2=3^2[(3^3)^3-1^3]+9=9(3^3-1)[(3^3)^2+3^3+1]+9$

$=9(3-1)(3^2+3+1)(3^6+3^3+1)+9=18(3^2+3+1)(3^6+3^3+1)+9$

$\therefore$　3^{11} 除以 3^2+3+1 之餘數為 9