1114 複數　　班級　　　姓名　　　　座號

一、單選題 (25 題 每題 4 分 共 100 分)

(　　) 1.化簡 $\dfrac{-\sin 22^\circ + i\sin 112^\circ}{(\cos 63^\circ + i\sin 63^\circ)(\cos 11^\circ - i\sin 11^\circ)}$　(A)$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$　(B)$\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$　(C)i　(D)$-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

【龍騰自命題.】

解答　A

解析　原式 $=\dfrac{\cos 112^\circ + i\sin 112^\circ}{(\cos 63^\circ + i\sin 63^\circ)[\cos(-11^\circ) + i\sin(-11^\circ)]}=\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ$

$=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

(　　) 2.設 $i^3+i^6+i^9+i^{12}=a+bi$，試求 $a+b$ 之值？　(A)0　(B)1　(C)-1　(D)-2

【課本練習題-自我評量.】

解答　A

解析　$i^3+i^6+i^9+i^{12}=-i-1+i+1=0$

$\therefore\ a=b=0 \Rightarrow a+b=0$

(　　) 3.設 $z=-7-24i$，其中 $i=\sqrt{-1}$，若 z 的共軛複數為 $a+bi$ 且 z 的絕對值為 c，則 $a-b+c$ 之值為　(A)-7　(B)-6　(C)$24+24i$　(D)$-24+24i$

【龍騰自命題.】

解答　B

解析　$\because\ z=-7-24i$　$\therefore\ \bar{z}=-7+24i$，$|z|=\sqrt{(-7)^2+(-24)^2}=25$

因此 $a=-7$，$b=24$，$c=25$，故 $a-b+c=-7-24+25=-6$

(　　) 4.設 a、b 為實數，若 $(\sin\frac{\pi}{8}+i\cos\frac{\pi}{8})^4=a+bi$，則 $a\times b=$　(A)1　(B)$\frac{1}{2}$　(C)0　(D)2

【龍騰自命題.】

解答　C

解析　$(\sin\frac{\pi}{8}+i\cos\frac{\pi}{8})^4=(\cos\frac{3}{8}\pi+i\sin\frac{3}{8}\pi)^4=\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi=-i$

$\therefore\ a=0$，$b=-1 \Rightarrow a\times b=0$

(　　) 5.設 $z=\dfrac{13(1-i)}{(3-2i)(10+11i)}$，則 z 之共軛複數為　(A)$\frac{3-5i}{17}$　(B)$\frac{5-3i}{17}$　(C)$\frac{5+3i}{17}$　(D)$\frac{3+5i}{17}$

【龍騰自命題.】

解答　D

解析　$z=\dfrac{13(1-i)}{52+13i}=\dfrac{1-i}{4+i}=\dfrac{3-5i}{17}$　故 $\bar{z}=\dfrac{3+5i}{17}$

(　　) 6.設 a、b、c 為實數，若 $1-2i$ 與 3 為方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 之根，則 $a=$　(A)-5　(B)-4　(C)-3　(D)-2

【龍騰自命題.】

解答　A

解析　先找以 $1-2i$ 為根的二次方程式

令 $x=1-2i \Rightarrow x-1=-2i \Rightarrow (x-1)^2=(-2i)^2$

$\Rightarrow x^2-2x+1=-4 \Rightarrow x^2-2x+5=0$

又原式有 $x=3$ 的根 $\Rightarrow (x-3)(x^2-2x+5)=0$

$\Rightarrow x^3-5x^2+11x-15=0$

$\therefore\ a=-5$，$b=11$，$c=-15$

〈另解〉實係數方程式有虛根必為共軛虛根

$\therefore$ 原式之三根為 $1-2i$，$1+2i$，3

根據根與係數關係

$a=-(1-2i+1+2i+3)=-5$

$b=(1-2i)(1+2i)+3(1+2i)+3(1-2i)=1+4+3+6i+3-6i=11$

$c=-(1-2i)\times(1+2i)\times 3=-(1+4)\times 3=-15$

(　　　) 7.設 $f(x)$為實係數三次多項式，若 $f(1)=f(1+i)=0$ 且 $f(0)>0$，則下列何者正確？ (A)$f(-2)<0$ (B)$f(2)>0$ (C)$f(4)<0$ (D)$f(6)=0$

【099 年歷屆試題.】

解答 C

解析 $\because$ $f(x)$為實係數三次多項式且 $f(1+i)=0$ $\therefore$ $f(1-i)=0$

而 $f(1)=0$，可設 $f(x)=a(x-1)[x-(1+i)][x-(1-i)]$

$\Rightarrow$ $f(x)=a(x^3-3x^2+4x-2)$

$\because$ $f(0)>0$ 且 $f(0)=a(0-0+0-2)=-2a$

$\therefore$ $a<0$

(A)$f(-2)=a[(-2)^3-3(-2)^2+4(-2)-2]=-30a>0$

(B)$f(2)=a[2^3-3(2)^2+4(2)-2]=2a<0$

(C)$f(4)=a[4^3-3(4)^2+4(4)-2]=30a<0$

(D)$f(6)=a[6^3-3(6)^2+4(6)-2]=130a<0$

(　　　) 8.若 k 為整數，方程式 $x^2+(k-2)x+1=0$ 有虛根，則 k 的最大值為 (A)5 (B)4 (C)3 (D)2

【隨堂講義補充題.】

解答 C

解析 $\because$ 方程式有虛根 $\Rightarrow$ $D=b^2-4ac<0$

即 $(k-2)^2-4\times1\times1<0$ $\Rightarrow$ $k^2-4k+4-4<0$

$\Rightarrow$ $k^2-4k<0$ $\Rightarrow$ $k(k-4)<0$ $\Rightarrow$ $0<k<4$

故最大整數 $k=3$

(　　　) 9.設函數 $f(x)=\dfrac{5}{i+x}$，其中 $i=\sqrt{-1}$，則 $f(f(2))$之值為 (A)$\dfrac{5}{2}$ (B)$\dfrac{5}{3}$ (C)$\dfrac{5}{4}$ (D)1

【龍騰自命題.】

解答 A

解析 $f(2)=\dfrac{5}{2+i}=\dfrac{5(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\dfrac{5(2-i)}{5}=2-i$

$f(f(2))=f(2-i)=\dfrac{5}{i+(2-i)}=\dfrac{5}{2}$

(　　　) 10.設 $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，求 $\omega^{22}+\dfrac{1}{\omega^{40}}=$ (A)1 (B)-1 (C)$-i$ (D)i

【龍騰自命題.】

解答 B

解析 $\because$ $\omega^3=1$ 且 $\omega^2+\omega+1=0$ $\therefore$ 原式$=\omega+\dfrac{1}{\omega}=\dfrac{\omega^2+1}{\omega}=\dfrac{-\omega}{\omega}=-1$

(　　　) 11.若方程式 $x^3+x^2+2x-4=0$ 有一根為 $-1+\sqrt{3}i$，另兩根為 α 、 β，則 $\alpha+\beta$ 之值為 (A)-2 (B)2 (C)$-\sqrt{3}i$ (D)$\sqrt{3}i$

【隨堂講義補充題.】

解答 C

解析 $\because$ 實係數方程式有一根為 $-1+\sqrt{3}i$，必有另一根為 $-1-\sqrt{3}i$

設 $x=-1+\sqrt{3}i$ $\Rightarrow$ $x+1=\sqrt{3}i$

平方得 $x^2+2x+1=-3$ $\Rightarrow$ $x^2+2x+4=0$

方程式 $x^3+x^2+2x-4=(x^2+2x+4)\cdot(x-1)=0$

$\Rightarrow$ 另有一根為 $x=1$

故 $\alpha+\beta=1+\left(-1-\sqrt{3}i\right)=-\sqrt{3}i$

(　　) 12.設 k 為實數，若方程式 $2x^2+(k-i)x+3i=0$ 有實根，則 k 之值為　(A) -6　(B) -4　(C) -3　(D) -2

【隨堂講義補充題.】

解答　A

解析　設實根為 α

$\Rightarrow\ 2\alpha^2+(k-i)\alpha+3i=0$

$\Rightarrow\ \left(2\alpha^2+k\alpha\right)+(3-\alpha)i=0+0i$

$\therefore\ \begin{cases}2\alpha^2+k\alpha=0\\3-\alpha=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha=3\\2\times3^2+3k=0\end{cases}$ 得 $k=-6$

(　　) 13.設 k 為實數，方程式 $x^2+(k-2)x+(2k-7)=0$ 有虛根，求 k 之範圍為　(A) $5<k<9$　(B) $4<k<8$　(C) $3<k<9$　(D) $4<k<9$

【隨堂講義補充題.】

解答　B

解析　方程式有虛根　$\Rightarrow$　$D<0$

即 $(k-2)^2-4\times1\times(2k-7)<0$

$\Rightarrow\ k^2-4k+4-8k+28<0$

$\Rightarrow\ k^2-12k+32<0$

$\Rightarrow\ (k-4)(k-8)<0$

$\Rightarrow\ 4<k<8$

(　　) 14.下列何者與 $P(2,\frac{\pi}{3})$ 表示同一點？　(A) $(2,\frac{2\pi}{3})$　(B) $(2,\frac{7\pi}{3})$　(C) $(2,\frac{5\pi}{3})$　(D) $(2,\frac{4\pi}{3})$

【龍騰自命題.】

解答　B

(　　) 15.若複數 $z=1-\sqrt{3}i$，則 z 在複數平面上與原點的距離為　(A) 1　(B) $\sqrt{3}$　(C) 2　(D) 4

【隨堂講義補充題.】

解答　C

解析　$|z|=\left|1-\sqrt{3}i\right|=\sqrt{1^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{4}=2$

(　　) 16.設 $i=\sqrt{-1}$，已知 $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 且 $\omega^2+\omega+1=0$，試求 $(2-\omega)(2-\omega^2)=$　(A) 5　(B) 7　(C) $3\sqrt{3}i$　(D) $6\sqrt{3}i$

【097 年歷屆試題.】

解答　B

解析　$\because\ \omega^2+\omega+1=0$（即 $\omega^2+\omega=-1$）

$\Rightarrow\ (\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0\ \Rightarrow\ \omega^3-1=0\ \Rightarrow\ \omega^3=1$

$\therefore\ (2-\omega)(2-\omega^2)=4-2\omega^2-2\omega+\omega^3=4-2(\omega^2+\omega)+\omega^3$

$=4-2\times(-1)+1=7$

(　　) 17.設兩複數 $z_1=1+3i$，$z_2=3-4i$，則 $\overline{(\frac{z_1}{z_2})}=$　(A) $\dfrac{-9+13i}{25}$　(B) $\dfrac{-9-13i}{25}$　(C) $\dfrac{9-13i}{25}$　(D) $\dfrac{9+13i}{25}$

【龍騰自命題.】

解答　B

解析　$\overline{(\frac{z_1}{z_2})}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}=\dfrac{1-3i}{3+4i}=\dfrac{(1-3i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}=\dfrac{3-4i-9i-12}{9+16}=\dfrac{-9-13i}{25}$

(　　) 18.設點 $A(2,0)$，點 $B(0,2)$ 且 C 為線段 $\overline{AB}$ 之中點，則 C 點的極坐標為　(A) $(2,\frac{\pi}{4})$　(B) $(\sqrt{2},\frac{\pi}{4})$　(C) $(2,\frac{\pi}{3})$　(D) $(2\sqrt{2},\frac{\pi}{4})$

【龍騰自命題.】

解答 B

解析 $\overline{AB}$ 之中點 $C(1,1)$，$r=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

而 $\cos\theta=\dfrac{x}{r}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\sin\theta=\dfrac{y}{r}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，取 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$，故極坐標為 $(\sqrt{2},\dfrac{\pi}{4})$

(　　　) 19.已知 $i=\sqrt{-1}$，則下列何者為複數 $4+4\sqrt{3}i$ 的一個平方根？ (A) $\sqrt{6}-\sqrt{2}i$　(B) $\sqrt{6}+\sqrt{2}i$　(C) $-\sqrt{6}+\sqrt{2}i$　(D) $\sqrt{3}+\sqrt{2}i$

【093 年歷屆試題.】

解答 B

解析 $4+4\sqrt{3}i=8(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i)=8(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3})$ $\Rightarrow$ $4+4\sqrt{3}i$ 的平方根為

$z_k=\sqrt{8}(\cos\dfrac{2k\pi+\frac{\pi}{3}}{2}+i\sin\dfrac{2k\pi+\frac{\pi}{3}}{2})$（其中 $k=0,1$）

即 $z_0=\sqrt{8}(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6})=2\sqrt{2}(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i)=\sqrt{6}+\sqrt{2}i$

$z_1=\sqrt{8}(\cos\dfrac{7}{6}\pi+i\sin\dfrac{7}{6}\pi)=2\sqrt{2}(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i)=-\sqrt{6}-\sqrt{2}i$

$\therefore$ $4+4\sqrt{3}i$ 的平方根為 $\sqrt{6}+\sqrt{2}i$ 及 $-\sqrt{6}-\sqrt{2}i$

(　　　) 20.設 $z_1=\left(\cos\dfrac{5}{3}\pi+i\sin\dfrac{5}{3}\pi\right)^4$，$z_2=\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)^2$，則 $\dfrac{z_1}{z_2}$ 之值為何？ (A) -1　(B) i　(C) 0　(D) 1

【103 年歷屆試題.】

解答 D

解析 $z_1=\left(\cos\dfrac{5}{3}\pi+i\sin\dfrac{5}{3}\pi\right)^4=\cos\left(4\times\dfrac{5}{3}\pi\right)+i\sin\left(4\times\dfrac{5}{3}\pi\right)=\cos\dfrac{20}{3}\pi+i\sin\dfrac{20}{3}\pi$

$=\cos\left(3\times2\pi+\dfrac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(3\times2\pi+\dfrac{2}{3}\pi\right)=\cos\dfrac{2}{3}\pi+i\sin\dfrac{2}{3}\pi$

$z_2=\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)^2=\cos\left(2\times\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(2\times\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos\dfrac{2}{3}\pi+i\sin\dfrac{2}{3}\pi$

$\because$ $z_1=z_2$　$\therefore$ $\dfrac{z_1}{z_2}=1$

(　　　) 21.設 $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，則 $\dfrac{\omega^{107}}{\omega+1}=$　(A) -1　(B) $-\omega$　(C) ω^2　(D) 1

【106 年歷屆試題.】

解答 A

解析 $\because$ $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

$\therefore$ $\omega^3=1$ 且 $\omega^2+\omega+1=0$

(1) $\omega^{107}=\omega^{3\times35+2}=\omega^{3\times35}\times\omega^2=\left(\omega^3\right)^{35}\times\omega^2=1^{35}\times\omega^2=\omega^2$

(2) $\omega^2+\omega+1=0$ $\Rightarrow$ $\omega+1=-\omega^2$

故 $\dfrac{\omega^{107}}{\omega+1}=\dfrac{\omega^2}{-\omega^2}=-1$

(　　　) 22.試判別方程式 $x^2+3x+3=0$ 兩根的性質為 (A)兩相異實根　(B)兩相等實根　(C)兩共軛虛根　(D)全部皆非

【隨堂測驗.】

解答 C

解析 方程式 $x^2+3x+3=0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4\times1\times3 = 9-12<0$

∴　兩共軛虛根

(　　　) 23.設 ω 為 $x^3=1$ 之一虛根，則 $2+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\omega^5+\omega^6$ 之值為　(A) 1　(B) -1　(C) 2　(D) 3

【隨堂測驗.】

解答　C

解析　$\omega^3=1$ 且 $\omega^2+\omega+1=0$

原式 $=1+(1+\omega+\omega^2)+1+\omega^4(1+\omega+\omega^2)$

$=1+0+1+\omega^4\times0=1+1=2$

(　　　) 24.已知 $i=\sqrt{-1}$，a 為複數，若二次方程式 $x^2-ax-4+7i=0$ 有一根為 $2-i$，則另一根為　(A) $-3+2i$　(B) $2-3i$　(C) $2+3i$　(D) $2+i$

【隨堂測驗.】

解答　A

解析　設另一根為 α，則

$$\begin{cases}\alpha+(2-i)=-\dfrac{-a}{1}=a\\ \alpha\times(2-i)=\dfrac{-4+7i}{1}\end{cases}$$

∴　$\alpha=\dfrac{-4+7i}{2-i}=\dfrac{(-4+7i)(2+i)}{5}=\dfrac{-8-4i+14i-7}{5}=-3+2i$

(　　　) 25.下列哪一個數是1的三次方根？　(A) $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt3}{2}i$　(B) $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt3}{2}i$　(C) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt3}{2}i$　(D) $\frac{\sqrt3}{2}+\frac{1}{2}i$

【隨堂測驗.】

解答　B

解析　$x^3=1=1+0i=\cos0^\circ+i\sin0^\circ$

$x_k=\cos\dfrac{0^\circ+2k\pi}{3}+i\sin\dfrac{0^\circ+2k\pi}{3}$，$k=0,1,2$

$x_0=\cos0^\circ+i\sin0^\circ=1+0i$

$x_1=\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt3}{2}i$

$x_2=\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\sin\dfrac{4\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt3}{2}i$