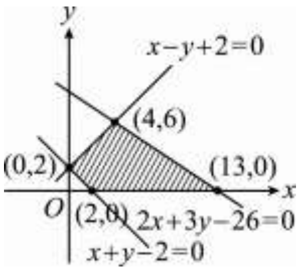
1114　　不等式　　　姓名　　　　　　　座號

## 一、單選題 (25 題　每題 4 分　共 100 分)

(　　　) 1.滿足 $\begin{cases} x\ge 0，y\ge 0 \\ x-y+2\ge 0 \\ 2x+3y-26\le 0 \\ x+y-2\ge 0 \end{cases}$ 的條件下，$f(x, y)=x-2y$ 的最小值為　(A)–4　(B)–8　(C)–12　(D)–16

解答　B

解析　$\begin{cases} x\ge 0 \\ y\ge 0 \\ x-y+2\ge 0 \\ 2x+3y-26\le 0 \\ x+y-2\ge 0 \end{cases}$　滿足方程組之區域為斜線部分




所圍區域之端點(2 , 0)、(13 , 0)、(4 , 6)、(0 , 2)

代入 $f(x, y)=x-2y$

$\Rightarrow$　$f(2, 0)=2-2\times 0=2$

$f(13, 0)=13-2\times 0=13$

$f(4, 6)=4-2\times 6=-8$

$f(0, 2)=0-2\times 2=-4$

$\Rightarrow$　$f(x, y)$的最小值為–8

(　　　) 2.若 $x$、$y$ 為實數且 $2x+3y=2\sqrt{13}$，則 $x^2+y^2$ 的最小值為　(A)1　(B)2　(C)3　(D)4

解答　D

解析　$(x^2+y^2)(2^2+3^2)\ge(2x+3y)^2$　$\Rightarrow$　$x^2+y^2\ge\dfrac{(2\sqrt{13})^2}{13}=4$

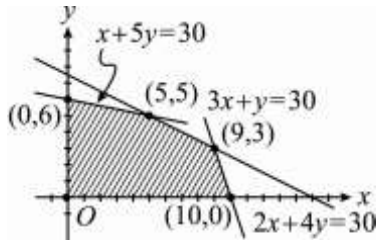
(　　　) 3.某工廠製造甲、乙種產品，均須使用 $A$、$B$、$C$ 三種原料，製造 1 噸的甲產品須 $A$、$B$、$C$ 三種原料分別為 2 噸、3 噸、1 噸，且可獲得 2 萬元的利潤；製造 1 噸的乙產品須使用 $A$、$B$、$C$ 三種原料分別為 4 噸、1 噸、5 噸，且獲利 3 萬元。現工廠內 $A$、$B$、$C$ 三種原料均有 30 噸的庫存，該工廠製造 $x$ 噸甲產品、$y$ 噸乙產品時，將可獲得最大的利潤為 $p$ 萬元，則　(A)$x=3$　(B)$y=5$　(C)$p=27$　(D)$p=25$

解答　C

解析　由題意知：利潤函數 $f(x, y)=2x+3y$（萬元）

且限制條件為 $\begin{cases} x\ge 0，y\ge 0 \\ 2x+4y\le 30 \\ 3x+y\le 30 \\ x+5y\le 30 \end{cases}$

不等式組所成區域如圖中斜線部分：




由不等式組兩兩聯立解得多邊形各頂點坐標分別為(0 , 0)、(10 , 0)、(9 , 3)、(5 , 5)、(0 , 6)

又 $f(x, y)=2x+3y$

則 $f(0, 0)=0$，$f(10, 0)=20$，$f(9, 3)=27$，$f(5, 5)=25$，$f(0, 6)=18$

$\therefore$　當 $x=9$，$y=3$，最大利潤 $p=27$

(　　　) 4.設 $a$、$b$ 為實數，不等式 $ax^2+bx+2>0$ 之解為 $-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{2}{3}$，則 $a+b=$　(A)–2　(B)–3　(C)–5　(D)1

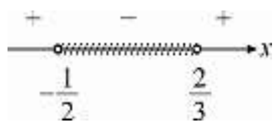
解答　C

解析　$ax^2+bx+2>0$ 的解為 $-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{2}{3}$

$\Rightarrow$　$[x-(-\dfrac{1}{2})](x-\dfrac{2}{3})<0$　$\Rightarrow$　$(x+\dfrac{1}{2})(x-\dfrac{2}{3})<0$

$\Rightarrow$　$(2x+1)(3x-2)<0$　$\Rightarrow$　$6x^2-x-2<0$　$\Rightarrow$　$-6x^2+x+2>0$

比較 $ax^2+bx+2>0$　$\Rightarrow$　$a=-6$，$b=1$　　$\therefore$　$a+b=-6+1=-5$




(　　　) 5.不等式 $\dfrac{3}{4}x-\dfrac{2x-1}{6}<\dfrac{3x+1}{2}-\dfrac{5}{2}$ 之解為　(A)$x>-2$　(B)$x<-2$　(C)$x>2$　(D)$x<2$

解答　C

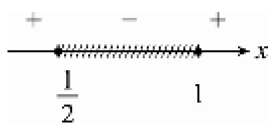
解析　$\dfrac{3}{4}x-\dfrac{2x-1}{6}<\dfrac{3x+1}{2}-\dfrac{5}{2}$ $\xrightarrow{\times 12}$ $9x-2(2x-1)<6(3x+1)-30$

$\Rightarrow$　$5x+2<18x-24$　$\Rightarrow$　$13x>26$　$\Rightarrow$　$x>2$

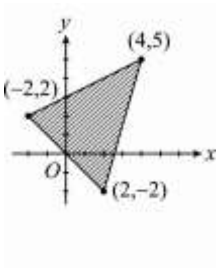
(　　　) 6.不等式$(x-1)(1-2x)\ge 0$ 之解為　(A)$x\ge 1$　(B)$\dfrac{1}{2}\le x\le 1$　(C)$x\le\dfrac{1}{2}$　(D)$x\le\dfrac{1}{2}$或 $x\ge 1$

解答　B

解析　$(x-1)(1-2x)\ge 0$　$\Rightarrow$　$(x-1)(2x-1)\le 0$　$\Rightarrow$　$\dfrac{1}{2}\le x\le 1$




(　　　) 7.若 $P(x, y)$是如圖三角形區域內的點，則 $h(x, y)=\dfrac{y+1}{x+3}$ 的最大值為




(A)$\frac{6}{7}$ (B)$\frac{1}{3}$ (C)$-\frac{1}{5}$ (D)3

解答 D

解析 $h(x,y)$表 $A(-3,-1)$與 $P$ 點連線之斜率，取 $h(-2,2)$得

最大值為 $\frac{2+1}{-2+3}=3$

( )8.設 $a>0$，$b>0$，若 $a+b=9$，則 $ab^2$ 的最大值為 (A)108 (B)81 (C)54 (D)9

解答 A

解析 $\because \frac{a+\frac{b}{2}+\frac{b}{2}}{3}\ge\sqrt[3]{a\times\frac{b}{2}\times\frac{b}{2}}$ $\therefore \frac{a+b}{3}\ge\sqrt[3]{\frac{1}{4}ab^2}$ $\Rightarrow$

$\frac{9}{3}\ge\sqrt[3]{\frac{1}{4}ab^2}$ $\Rightarrow$ $ab^2\le 108$

( )9.不等式 $9x^2-30x+25\le 0$ 之解為 (A)$x$ 為任意實數 (B)無解 (C)$3\le x\le 5$ (D)$x=\frac{5}{3}$

解答 D

解析 $9x^2-30x+25\le 0$ $\Rightarrow$ $(3x-5)^2\le 0$（<0 為不可能）

$\Rightarrow$ $(3x-5)^2=0$ $\Rightarrow$ $x=\frac{5}{3}$

( ) 10.滿足$\begin{cases}0<x<5\\0<y<6\\x+y\le 7\end{cases}$的整數解有幾個？ (A)15 (B)16 (C)17 (D)18

解答 C

解析

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | 1、2、3、4、5 | 1、2、3、4、5 | 1、2、3、4 | 1、2、3 |

$\therefore$ 有5+5+4+3=17 個

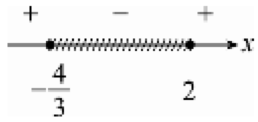
( ) 11.$3x^2-2x+a\le 0$ 之解為$-\frac{4}{3}\le x\le 2$，則 $a=$ (A)$\frac{8}{3}$ (B)−8 (C)8 (D)−4

解答 B

解析 $3x^2-2x+a\le 0$ 之解為$-\frac{4}{3}\le x\le 2$ $\Rightarrow$

$[x-(-\frac{4}{3})](x-2)\le 0\xrightarrow{\times 3}(3x+4)(x-2)\le 0$ $\Rightarrow$ $3x^2-2x-8\le 0$

比較 $3x^2-2x+a\le 0$ $\Rightarrow$ $a=-8$




( ) 12.設 $x$、$y>0$，若 $xy^2=36$，則 $3x+y$ 的最小值為 (A)9 (B)12 (C)18 (D)27

解答 A

解析 $\because \frac{3x+\frac{y}{2}+\frac{y}{2}}{3}\ge\sqrt[3]{3x\times\frac{y}{2}\times\frac{y}{2}}$ $\therefore$

$\frac{3x+y}{3}\ge\sqrt[3]{\frac{3}{4}xy^2}$ $\Rightarrow$ $3x+y\ge 3\sqrt[3]{\frac{3}{4}xy^2}=9$

( ) 13.一直線 $L$ 過二點$(-1,3)$、$(2,4)$，$L$ 將平面分成之兩半平面中，包含點$(1,2)$部分之半平面滿足 (A)$3x-y>0$ (B)$3x-y-2<0$ (C)$x<3y-10$ (D)$x>3y-10$

解答 D

解析 直線 $L$：$y-3=\frac{3-4}{-1-2}(x+1)$ $\Rightarrow$ $y-3=\frac{1}{3}(x+1)$，

即 $x-3y+10=0$，而含$(1,2)$之半平面應滿足 $x>3y-10$

( ) 14.設一函數 $f(x)=(x^2+4x+5)(x^2-2x-3)$，若 $f(x)<0$，則 $x$ 之範圍為 (A)$1<x<5$ (B)$-5<x<-1$ (C)$1<x<3$ (D)$-1<x<3$

解答 D

解析 $\because$ $f(x)<0$ $\Rightarrow$ $(x^2+4x+5)(x^2-2x-3)<0$

但 $x^2+4x+5$ 恆為正數 $\Rightarrow$ $x^2-2x-3<0$ $\Rightarrow$ $(x+1)(x-3)<0$ $\therefore$ $x$ 之範圍為$-1<x<3$

( ) 15.滿足不等式$\frac{2x-3}{2}<\frac{4x+3}{3}$之最小整數為 (A)−9 (B)−8 (C)−7 (D)−6

解答 C

( )16.若$(-1,k)$為 $3x-y<4$ 圖形內一點，則 $k$ 的範圍為 (A)$k<-7$ (B)$k>-7$ (C)$k>1$ (D)$k<-1$

解答 B

( )17.求不等式 $x^2+x+1>0$的解為何？ (A)無實數解 (B)所有實數 (C)$x=-\frac{1}{2}$ (D)所有不等於$-\frac{1}{2}$的實數

解答 B

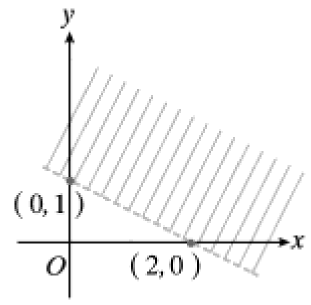
解析 $\because$ $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$ 恆正

$\therefore$ $x^2+x+1>0$的解為所有實數

( ) 18.不等式$\frac{1}{2}(x-1)\ge\frac{1}{3}(x+2)$的解為 (A)$x\ge 7$ (B)$x\ge\frac{1}{5}$ (C)$x\le 7$ (D)$x\le\frac{1}{5}$

解答 A

( ) 19.圖中所示的斜線部分，是下列哪一個不等式的圖形？




(A)$2x-y-2<0$　(B)$2x+y+2\ge 0$　(C)$x-2y-2\le 0$

(D)$x+2y-2>0$　(E)$2x-y+2<0$

解答　D

解析　經過(0 , 1)、(2 , 0)

兩點的直線方程式為$\frac{x}{2}+\frac{y}{1}=1$　$\Rightarrow$　$x+2y-2=0$

圖解區域在直線 $x+2y-2=0$ 的右側，

就 $x$ 項而論不等式應為「$x>$　」，故所求的不等式為 $x+2y-2>0$

(　　) 20.下列何者為不等式$|x+5|\ge|2-x|$的解？

(A)$-\frac{3}{2}\le x\le 2$　(B)$x\ge-\frac{3}{2}$　(C)$-5\le x\le 0$　(D)$x\ge-5$

解答　B

解析　$\because$　$|x+5|\ge|2-x|$　$\Rightarrow$　$(x+5)^2-(2-x)^2\ge 0$

$\Rightarrow$　$[(x+5)+(2-x)]\times[(x+5)-(2-x)]\ge 0$　$\Rightarrow$　$7(2x+3)\ge 0$

$\therefore$　$x\ge-\frac{3}{2}$

(　　) 21.已知正數 $a$ 、$b$ 、$c$ 滿足 $abc=16$ ，則 $a+2b+2c$ 的最小值為　(A)8　(B)12　(C)16　(D)20

解答　B

解析　利用算幾不等式

$$\frac{a+2b+2c}{3}\ge\sqrt[3]{a\times 2b\times 2c}=\sqrt[3]{4abc}=\sqrt[3]{64}=4$$

$\Rightarrow$　$a+2b+2c\ge 12$

$\therefore$　$a+2b+2c$ 的最小值為12

(　　) 22.已知正數 $a$ 、$b$ 滿足 $ab=16$ ，當 $4a+b$ 為最小值時，此時 $a=$　(A)2　(B)3　(C)4　(D)5

解答　A

解析　利用算幾不等式

$$\frac{4a+b}{2}\ge\sqrt{4a\times b}=\sqrt{64}=8$$

$\Rightarrow$　$4a+b\ge 16$

$4a+b$ 的最小值為16 ，此時 $4a=b$

$\therefore$　$4a=b=8$　$\Rightarrow$　$a=2$ ，$b=8$

(　　) 23.設 $a$、$b$ 為實數，若一元二次不等式 $ax^2+x+b>0$ 的解集合為$\{x\,|\,\frac{-1}{5}<x<\frac{2}{3}$ ，$x$ 為實數$\}$ ，則 $2a+b=$

(A)$-5$　(B)$-4$　(C)4　(D)5

解答　B

解析　$\because$　$-\frac{1}{5}<x<\frac{2}{3}$　$\Rightarrow$　$(x-(-\frac{1}{5}))(x-\frac{2}{3})<0$　$\Rightarrow$

$(x+\frac{1}{5})(x-\frac{2}{3})<0$

$\Rightarrow$　$x^2-\frac{7}{15}x-\frac{2}{15}<0$　$\xRightarrow{\times(-\frac{15}{7})}$　$-\frac{15}{7}x^2+x+\frac{2}{7}>0$

與 $ax^2+x+b>0$ 比較，得 $a=-\frac{15}{7}$ ，$b=\frac{2}{7}$

因此 $2a+b=2\times(-\frac{15}{7})+\frac{2}{7}=-4$

(　　) 24.已知 $a$ 、$b$ 為實數，若不等式 $x^2+ax\le b$ 之解為 $-5\le x\le 3$，則 $a+b=$　(A)$-17$　(B)$-13$　(C)13　(D)17

解答　D

解析　$-5\le x\le 3$

$\Rightarrow$　$[x-(-5)](x-3)\le 0$

$\Rightarrow$　$(x+5)(x-3)\le 0$

$\Rightarrow$　$x^2+2x-15\le 0$

$\Rightarrow$　$x^2+2x\le 15$

上式與 $x^2+ax\le b$ 作比較，

則 $a=2$ ，$b=15$

故 $a+b=2+15=17$

(　　) 25.在 $x\ge 0$ ，$y\ge 2$ ，$2x+y\le 8$ 的條件下，則 $3x-2y$ 的最大值為　(A)4　(B)5　(C)6　(D)7

解答　B

解析　如圖，可行解區域的頂點為$(0,2)$ 、$(3,2)$ 和$(0,8)$

| $(x,y)$ | $(0,2)$ | $(3,2)$ | $(0,8)$ |
|---|---|---|---|
| $3x-2y$ | $-4$ | 5 | $-16$ |

$\therefore$　最大值為 5