1113 複數　班級　　姓名　　　座號

一、單選題 (25 題 每題 4 分 共 100 分)

(　　) 1.設 $i=\sqrt{-1}$ 且複數 z 的主輻角記作 Arg(z)，$0\le \text{Arg}(z)<2\pi$，試求 $\text{Arg}(-\sqrt{3}+i)=$ (A)$\frac{\pi}{6}$ (B)$\frac{5}{6}\pi$ (C)$\frac{7}{6}\pi$ (D)$\frac{11}{6}\pi$

解答 B

解析 $\because\ |-\sqrt{3}+i|=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2}=2 \Rightarrow -\sqrt{3}+i=2(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)$

即 $\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin\theta=\frac{1}{2}$

但 $0\le\theta<2\pi$（$\because\ 0\le\text{Arg}(z)<2\pi$） $\Rightarrow\ \theta=\frac{5}{6}\pi$

$\therefore\ \text{Arg}(-\sqrt{3}+i)=\frac{5}{6}\pi$

(　　) 2.已知 $i=\sqrt{-1}$，且 a、b 為實數，若 $\frac{1-3i}{1+i}=a+bi$，則 $a+b=$ (A)-3 (B)-1 (C)1 (D)3

【091 年歷屆試題.】

解答 A【096 年歷屆試題.】

$$\frac{1-3i}{1+i}=\frac{(1-3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{1-i-3i+3i^2}{1^2-i^2}=\frac{1-4i-3}{1+1}=\frac{-2-4i}{2}=-1-2i=a+bi$$

$\therefore\ a=-1$，$b=-2$

故得 $a+b=-3$

(　　) 3.已知 $i=\sqrt{-1}$，則 $(1-i)^6=$ (A)$-8i$ (B)$8i$ (C)$12-8i$ (D)$12+8i$【092 年歷屆試題.】

解答 B　解析 由題目中

解析 $(1-i)^6=[(1-i)^2]^3=(-2i)^3=-8i^3=8i$

《另解》

$$(1-i)^6=[\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i)]^6=[\sqrt{2}(\cos\frac{7}{4}\pi+i\sin\frac{7}{4}\pi)]^6$$

$$=2^3(\cos\frac{21}{2}\pi+i\sin\frac{21}{2}\pi)=8(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})=8(0+i\times1)=8i$$

(　　) 4.已知 a、b 為實數，$i=\sqrt{-1}$。若 $(\frac{\sqrt{3}-i}{1-i})^8=a+bi$，則 $a^2+b^2=$ (A)16 (B)64 (C)256 (D)1024

【102 年歷屆試題.】

解答 C

解析 $\because\ (\frac{\sqrt{3}-i}{1-i})^8=a+bi\quad\therefore\ |(\frac{\sqrt{3}-i}{1-i})^8|=|a+bi|$

而 $|(\frac{\sqrt{3}-i}{1-i})^8|=|\frac{\sqrt{3}-i}{1-i}|^8=(\frac{|\sqrt{3}-i|}{|1-i|})^8=(\frac{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}{\sqrt{1^2+(-1)^2}})^8$

$$=(\frac{2}{\sqrt{2}})^8=(\sqrt{2})^8=[(\sqrt{2})^2]^4=2^4=16$$

且 $|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$，因此 $\sqrt{a^2+b^2}=16$，故 $a^2+b^2=16^2=256$

(　　　) 5.已知 $i=\sqrt{-1}$，則複數 $(3-2i)(4+5i)$ 的實部為何？ (A)2 (B)7 (C)9 (D)22

【093 年歷屆試題.】

解答 D

解析 $(3-2i)(4+5i)=[3\times4-(-2)\times5]+[3\times5+(-2)\times4]i=22+7i$

$\therefore$ $(3-2i)(4+5i)$ 的實部為 22

(　　　) 6.設 $z=\dfrac{(5-12i)(3+4i)}{(4-3i)(12-5i)}$，$i=\sqrt{-1}$，則 $|z|$ 之值為何？ (A)1 (B)$\sqrt{2}$ (C)2 (D)13

【103 年歷屆試題.】

解答 A

解析 $|z|=\left|\dfrac{(5-12i)(3+4i)}{(4-3i)(12-5i)}\right|=\dfrac{|5-12i||3+4i|}{|4-3i||12-5i|}$

$$=\frac{\sqrt{5^2+(-12)^2}\times\sqrt{3^2+4^2}}{\sqrt{4^2+(-3)^2}\times\sqrt{12^2+(-5)^2}}=\frac{13\times5}{5\times13}=1$$

(　　　) 7.設 $i=\sqrt{-1}$ 且 a 與 b 為兩實數，若 $(a+bi)(1+3i)=8+4i$，則 $(a+bi)^2=$ (A)$8i$ (B)$-8i$ (C)$8+8i$ (D)$8-8i$

【094 年歷屆試題.】

解答 B

解析 $\because$ $(a+bi)(1+3i)=8+4i$

$\Rightarrow$ $a+bi=\dfrac{8+4i}{1+3i}=\dfrac{(8+4i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}=\dfrac{20-20i}{10}=2-2i$

$\therefore$ $(a+bi)^2=(2-2i)^2=4-8i+4i^2=-8i$

(　　　) 8.設 $i=\sqrt{-1}$，試求 $(-i)^8+(-i)^7-(-i)^6+(-i)^5+(-i)^4-(-i)^3-(-i)^2+(-i)+1=$ (A)$2-5i$ (B)$2+5i$ (C)$-5+2i$ (D)$5-2i$

【097 年歷屆試題.】

解答 D

解析 $(-i)^2=i^2=-1$；$(-i)^3=-i^3=-i^2\times i=-(-1)\times i=i$；$(-i)^4=i^4=1$

$(-i)^5=-i^5=-i^4\times i=(-1)\times i=-i$；$(-i)^6=i^6=i^4\times i^2=1\times(-1)=-1$

$(-i)^7=-i^7=-i^4\times i^3=-1\times(-i)=i$；$(-i)^8=i^8=i^4\times i^4=1\times1=1$

$\therefore$ $(-i)^8+(-i)^7-(-i)^6+(-i)^5+(-i)^4-(-i)^3-(-i)^2+(-i)+1$

$=1+i-(-1)+(-i)+1-i-(-1)-i+1$

$=1+i+1-i+1-i+1-i+1=5-2i$

(　　　) 9.已知 $i=\sqrt{-1}$，且 a、b 均為實數。若 $1-\sqrt{3}i$ 為方程式 $x^3+3x^2+ax+b=0$ 的一根，則 $a+b=$ (A)-4 (B)-2 (C)8 (D)14

【098 年歷屆試題.】

解答 D

解析 $1-\sqrt{3}i$ 為 $x^3+3x^2+ax+b=0$ 的一根，且 a、b 均為實數

$\Rightarrow$ $1+\sqrt{3}i$ 也是 $x^3+3x^2+ax+b=0$ 的根

而 $[x-(1-\sqrt{3}i)][x-(1+\sqrt{3}i)]=x^2-2x+4$

則 $x^3+3x^2+ax+b=(x^2-2x+4)(x+\dfrac{b}{4})=x^3+(-2+\dfrac{b}{4})x^2+(4-\dfrac{b}{2})x+b$

$$\Rightarrow\ \begin{cases}-2+\dfrac{b}{4}=3\\4-\dfrac{b}{2}=a\end{cases}\ \Rightarrow\ b=20，a=-6$$

故 $a+b=-6+20=14$

《另解》

$1-\sqrt{3}i$ 為實係數方程式，$x^3+3x^2+ax+b=0$ 之一根，則 $1+\sqrt{3}i$ 為其另一根

設 α 為方程式的第三根

則三根和 $(1-\sqrt{3}i)+(1+\sqrt{3}i)+\alpha=-\dfrac{3}{1}=-3 \quad \Rightarrow \quad \alpha=-5$

$\therefore \quad x^3+3x^2+ax+b=[x-(1-\sqrt{3}i)][x-(1+\sqrt{3}i)][x-(-5)]$

$\qquad\qquad =x^3+3x^2-6x+20$

$\Rightarrow \quad a=-6$，$b=20$

故 $a+b=-6+20=14$

(　　　) 10.設 a、b 為實數且 $i=\sqrt{-1}$，若 $2+\sqrt{3}i$ 為 $2x^2+ax+b=0$ 之一根，則 $a+b=$　(A)1　(B)3　(C)6　(D)14

【095 年歷屆試題.】

解答 C

解析 $2+\sqrt{3}i$ 為 $2x^2+ax+b=0$ 之一根

又 a、b 為實數 $\Rightarrow$ 另一根為 $2-\sqrt{3}i$

由根與係數關係知 $\begin{cases}(2+\sqrt{3}i)+(2-\sqrt{3}i)=-\dfrac{a}{2}\\(2+\sqrt{3}i)(2-\sqrt{3}i)=\dfrac{b}{2}\end{cases}$

$\Rightarrow \quad 4=-\dfrac{a}{2}$ 且 $7=\dfrac{b}{2} \quad \Rightarrow \quad a=-8$ 且 $b=14$

$\therefore \quad a+b=6$

(　　　) 11.已知 $i=\sqrt{-1}$，a 為複數，若二次方程式 $x^2-ax-4+7i=0$ 有一根為 $2-i$，則另一根為何？　(A)$2-3i$　(B)$-3+2i$　(C)$2+i$　(D)$2+3i$

【092 年歷屆試題.】

解答 B

解析 設另一根為 α，則 $\alpha(2-i)=-4+7i$

$\Rightarrow \quad \alpha=\dfrac{-4+7i}{2-i}=\dfrac{(-4+7i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\dfrac{-15+10i}{5}=-3+2i$

$\therefore$ 另一根為 $-3+2i$

《註》本題並非實係數二次方程式，故兩根不一定共軛存在

(　　　) 12.令 $i=\sqrt{-1}$。若 $1+i$ 為方程式 $2x^2+kx+6+2i=0$ 的一根，則 $k=$　(A)-6　(B)-4　(C)$-5+i$　(D)$-10+2i$

【099 年歷屆試題.】

解答 A

解析 $\because \quad 1+i$ 為 $2x^2+kx+6+2i=0$ 的根　$\therefore \quad 2(1+i)^2+k(1+i)+6+2i=0$

$\Rightarrow \quad 2(2i)+k(1+i)+6+2i=0 \quad \Rightarrow \quad k(1+i)=-6-6i$

$\Rightarrow \quad k=\dfrac{-6-6i}{1+i}=\dfrac{-6(1+i)}{1+i}=-6$

故選(A)

(　　　) 13.設 $f(x)$為實係數三次多項式，若 $f(1)=f(1+i)=0$ 且 $f(0)>0$，則下列何者正確？　(A)$f(-2)<0$　(B)$f(2)>0$　(C)$f(4)<0$　(D)$f(6)=0$

【099 年歷屆試題.】

解答 C

解析 $\because \quad f(x)$為實係數三次多項式且 $f(1+i)=0$　$\therefore \quad f(1-i)=0$

而 $f(1)=0$，可設 $f(x)=a(x-1)[x-(1+i)][x-(1-i)]$

$\Rightarrow \quad f(x)=a(x^3-3x^2+4x-2)$

$\because \quad f(0)>0$ 且 $f(0)=a(0-0+0-2)=-2a$

$\therefore \quad a<0$

(A)$f(-2)=a[(-2)^3-3(-2)^2+4(-2)-2]=-30a>0$

(B)$f(2)=a[2^3-3(2)^2+4(2)-2]=2a<0$

(C)$f(4)=a[4^3-3(4)^2+4(4)-2]=30a<0$

(D)$f(6)=a[6^3-3(6)^2+4(6)-2]=130a<0$

(　　　) 14.已知 a 和 c 為實數，若複數 $a+2i$ 為一元二次方程式 $x^2+2x+c=0$ 的一根，則 c 之值為何？　(A) -4　(B) -2　(C)3　(D)5

【101 年歷屆試題.】

解答　D

解析　$\because$　a 為實數且 $a+2i$ 為實係數方程式 $x^2+2x+c=0$ 的一根

$\therefore$　另一根為 $a-2i$

兩根和：$(a+2i)+(a-2i)=-\dfrac{2}{1}$　$\Rightarrow$　$2a=-2$　$\Rightarrow$　$a=-1$

則兩根為 $-1+2i$ 與 $-1-2i$

兩根積：$(-1+2i)(-1-2i)=\dfrac{c}{1}$　$\Rightarrow$　$c=(-1)^2+2^2=5$

(　　　) 15.已知 $i=\sqrt{-1}$，化簡 $(\cos\dfrac{\pi}{7}-i\sin\dfrac{\pi}{7})(\cos\dfrac{10}{21}\pi+i\sin\dfrac{10}{21}\pi)=$　(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$　(B) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$　(C) $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$　(D) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

【098 年歷屆試題.】

解答　B

解析　原式 $=[\cos(-\dfrac{\pi}{7})+i\sin(-\dfrac{\pi}{7})](\cos\dfrac{10}{21}\pi+i\sin\dfrac{10}{21}\pi)$

$=\cos(-\dfrac{\pi}{7}+\dfrac{10}{21}\pi)+i\sin(-\dfrac{\pi}{7}+\dfrac{10}{21}\pi)=\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

(　　　) 16.設 $i=\sqrt{-1}$，已知 $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 且 $\omega^2+\omega+1=0$，試求 $(2-\omega)(2-\omega^2)=$　(A)5　(B)7　(C) $3\sqrt{3}i$　(D) $6\sqrt{3}i$

【097 年歷屆試題.】

解答　B

解析　$\because$　$\omega^2+\omega+1=0$（即 $\omega^2+\omega=-1$）

$\Rightarrow$　$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$　$\Rightarrow$　$\omega^3-1=0$　$\Rightarrow$　$\omega^3=1$

$\therefore$　$(2-\omega)(2-\omega^2)=4-2\omega^2-2\omega+\omega^3=4-2(\omega^2+\omega)+\omega^3$

$=4-2\times(-1)+1=7$

(　　　) 17.設 $i=\sqrt{-1}$ 且 a、b 為實數，若 $(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12})^{10}=a+bi$，則 $b-\sqrt{3}a=$　(A) -1　(B) -2　(C)1　(D)2

【096 年歷屆試題.】

解答　D

解析　$a+bi=(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12})^{10}=\cos\dfrac{10}{12}\pi+i\sin\dfrac{10}{12}\pi=\cos\dfrac{5}{6}\pi+i\sin\dfrac{5}{6}\pi$

$=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$

即 $a=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$b=\dfrac{1}{2}$

$\therefore$　$b-\sqrt{3}a=\dfrac{1}{2}-\sqrt{3}(-\dfrac{\sqrt{3}}{2})=2$

(　　　) 18.若 ω 為方程式 $x^2+x+1=0$ 之一複數根，則 $\omega^{2005}=$　(A) -1　(B)1　(C) $-\omega$　(D) ω

【094 年歷屆試題.】

解答　D

解析　$\because$　ω 為 $x^2+x+1=0$ 之一複數根

$\Rightarrow$　$\omega^2+\omega+1=0$　$\Rightarrow$　$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$

$\Rightarrow$　$\omega^3-1=0$，即 $\omega^3=1$

$\therefore$　$\omega^{2005}=(\omega^3)^{668}\times\omega=1^{668}\times\omega=\omega$

(　　　) 19.已知 $i=\sqrt{-1}$，則下列何者為複數 $4+4\sqrt{3}i$ 的一個平方根？ (A) $\sqrt{6}-\sqrt{2}i$ (B) $\sqrt{6}+\sqrt{2}i$ (C) $-\sqrt{6}+\sqrt{2}i$ (D) $\sqrt{3}+\sqrt{2}i$

【093 年歷屆試題.】

解答 B

解析 $4+4\sqrt{3}i=8(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)=8(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}) \Rightarrow 4+4\sqrt{3}i$ 的平方根為

$$z_k=\sqrt{8}(\cos\frac{2k\pi+\frac{\pi}{3}}{2}+i\sin\frac{2k\pi+\frac{\pi}{3}}{2})$$（其中 $k=0,1$）

即 $z_0=\sqrt{8}(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})=2\sqrt{2}(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)=\sqrt{6}+\sqrt{2}i$

$z_1=\sqrt{8}(\cos\frac{7}{6}\pi+i\sin\frac{7}{6}\pi)=2\sqrt{2}(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i)=-\sqrt{6}-\sqrt{2}i$

$\therefore$ $4+4\sqrt{3}i$ 的平方根為 $\sqrt{6}+\sqrt{2}i$ 及 $-\sqrt{6}-\sqrt{2}i$

(　　　) 20.已知 $i=\sqrt{-1}$，則 $(\sqrt{3}+i)^{10}=$ (A) $2^9(1+\sqrt{3}i)$ (B) $2^9(1-\sqrt{3}i)$ (C) $2^9(\sqrt{3}+i)$ (D) $2^9(\sqrt{3}-i)$

【091 年歷屆試題.】

解答 B

解析 由題目中

(1)先求 $\sqrt{3}+i$ 的極式

(2)再用(1)求 $(\sqrt{3}+i)^{10}$

(1) $\sqrt{3}+i=2(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\times\frac{1}{2})=2(\cos30^\circ+i\sin30^\circ)$

其中 $2=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{4}=|z|$

(2) $(\sqrt{3}+i)^{10}=[2(\cos30^\circ+i\sin30^\circ)]^{10}=2^{10}(\cos300^\circ+i\sin300^\circ)$

$=1024[\cos60^\circ+i(-\sin60^\circ)]=1024(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)$

$=512(1-\sqrt{3}i)=2^9(1-\sqrt{3}i)$

(　　　) 21.已知 $i=\sqrt{-1}$。若 $z=\cos78^\circ+i\sin78^\circ$，則 $z^{15}=$ (A) $-i$ (B) -1 (C) i (D) 1

【100 年歷屆試題.】

解答 C

解析 $z^{15}=(\cos78^\circ+i\sin78^\circ)^{15}=\cos(15\times78^\circ)+i\sin(15\times78^\circ)$

$=\cos1170^\circ+i\sin1170^\circ=\cos(3\times360^\circ+90^\circ)+i\sin(3\times360^\circ+90^\circ)$

$=\cos90^\circ+i\sin90^\circ=0+i=i$

(　　　) 22.設 $z_1=\left(\cos\frac{5}{3}\pi+i\sin\frac{5}{3}\pi\right)^4$，$z_2=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^2$，則 $\frac{z_1}{z_2}$ 之值為何？ (A) -1 (B) i (C) 0 (D) 1

【103 年歷屆試題.】

解答 D

解析 $z_1=\left(\cos\frac{5}{3}\pi+i\sin\frac{5}{3}\pi\right)^4=\cos\left(4\times\frac{5}{3}\pi\right)+i\sin\left(4\times\frac{5}{3}\pi\right)=\cos\frac{20}{3}\pi+i\sin\frac{20}{3}\pi$

$=\cos\left(3\times2\pi+\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(3\times2\pi+\frac{2}{3}\pi\right)=\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi$

$z_2=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^2=\cos\left(2\times\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(2\times\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi$

$\because$ $z_1=z_2$ $\therefore$ $\frac{z_1}{z_2}=1$

(　　　)23.已知 $z_1=\sqrt{3}+i$，$z_2=1+i$，其中 $i=\sqrt{-1}$，則 $z_1^{\,2}z_2^{\,4}$ 可表示為下列哪一個？ (A) $16(\cos240^\circ+i\sin240^\circ)$ (B) $16(\cos300^\circ+i\sin300^\circ)$

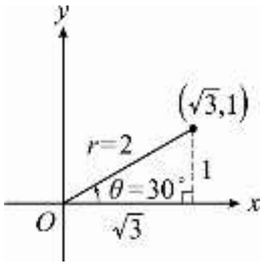
(C) $16(\cos 60°+i\sin 60°)$ (D) $16(\cos 120°+i\sin 120°)$

【105 年歷屆試題.】

解答 A

解析 (1) $z_1=\sqrt{3}+i$ 的極式：

令 $(x,y)=(\sqrt{3},1)$，如圖：

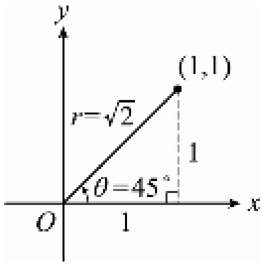


$r=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$，$\theta=30°$

則 $z_1=2(\cos 30°+i\sin 30°)$

(2) $z_2=1+i$ 的極式：

令 $(x,y)=(1,1)$，如圖：



$r=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，$\theta=45°$

則 $z_2=\sqrt{2}(\cos 45°+i\sin 45°)$

由(1)和(2)：

$z_1^{\ 2}=2^2\left[\cos(2\times 30°)+i\sin(2\times 30°)\right]=4(\cos 60°+i\sin 60°)$

$z_2^{\ 4}=(\sqrt{2})^4\left[\cos(4\times 45°)+i\sin(4\times 45°)\right]=4(\cos 180°+i\sin 180°)$

故 $z_1^{\ 2}z_2^{\ 4}=4\times 4\times\left[\cos(60°+180°)+i\sin(60°+180°)\right]$

$=16(\cos 240°+i\sin 240°)$

( ) 24.設 $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，則 $\dfrac{\omega^{107}}{\omega+1}=$ (A) -1 (B) $-\omega$ (C) ω^2 (D) 1

【106 年歷屆試題.】

解答 A

解析 $\because\ \omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

$\therefore\ \omega^3=1$ 且 $\omega^2+\omega+1=0$

(1) $\omega^{107}=\omega^{3\times 35+2}=\omega^{3\times 35}\times\omega^2=(\omega^3)^{35}\times\omega^2=1^{35}\times\omega^2=\omega^2$

(2) $\omega^2+\omega+1=0 \Rightarrow \omega+1=-\omega^2$

故 $\dfrac{\omega^{107}}{\omega+1}=\dfrac{\omega^2}{-\omega^2}=-1$

( ) 25.已知 $i=\sqrt{-1}$ 且 a、b 為實數，若 $(2+i)(a+bi)=15+5i$，則 $a+b=$ (A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 10

【104 年歷屆試題.】

解答 B

解析 $(2+i)(a+bi)=15+5i$

$\Rightarrow \quad a+bi=\frac{15+5i}{2+i}=\frac{5(3+i)}{2+i}=\frac{5(3+i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}$

$=\frac{5(6-3i+2i-i^2)}{2^2+1^2}=\frac{5(7-i)}{5}=7-i$

則 $a=7$ ， $b=-1$ ，故 $a+b=7+(-1)=6$