1113　複數　班級　　　姓名　　　　座號

一、單選題 (25 題 每題 4 分 共 100 分)

(　　) 1.設 $i=\sqrt{-1}$，則 $i^2+i^3+i^4+\cdots+i^{26}=$　(A) -1　(B) $-1-i$　(C) $-i$　(D) 0

【隨堂講義補充題.】

解答　A

解析　原式 $=\left[(-1)+(-i)+1+i\right]+\cdots+\left[(-1)+(-i)+1+i\right]+\left(i^4\right)^6\cdot i^2$

$=0+\cdots+0+i^2=-1$

(　　) 2.設 $z=\dfrac{3-i}{2i}$，求 z 之共軛複數 $\bar{z}=$　(A) $\dfrac{1-3i}{2}$　(B) $\dfrac{-1-3i}{2}$　(C) $\dfrac{1+3i}{2}$　(D) $\dfrac{-1+3i}{2}$

【龍騰自命題.】

解答　D

解析　$z=\dfrac{3-i}{2i}=\dfrac{3i-i^2}{2i^2}=\dfrac{-1-3i}{2}$，$\bar{z}=\overline{\dfrac{-1-3i}{2}}=\dfrac{-1+3i}{2}$

(　　) 3.設 ω 為 $x^5=1$ 之一個虛根，則 $(2+\omega)(2+\omega^2)(2+\omega^3)(2+\omega^4)=$　(A)10　(B)11　(C)12　(D)13

【龍騰自命題.】

解答　B

解析　$\because$　$x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$

$\therefore$　$\omega^4+\omega^3+\omega^2+\omega+1=0$　且　$\omega^5=1$

故原式 $=(2+\omega)(2+\omega^4)(2+\omega^2)(2+\omega^3)$

$=(5+2\omega+2\omega^4)(5+2\omega^2+2\omega^3)$

$=25+10(\omega^4+\omega^3+\omega^2+\omega)+4(\omega^4+\omega^3+\omega^2+\omega)$

$=25-10-4=11$

(　　) 4.設 x、y 為實數且滿足 $2x+y+3yi=x(1+i)+2+(y+6)i$，則 $x+y=$　(A) $\dfrac{11}{5}$　(B) $\dfrac{12}{15}$　(C)3　(D)2

【龍騰自命題.】

解答　D

解析　$2x+y+3yi=x(1+i)+2+(y+6)i$　$\Rightarrow$　$(2x+y)+3yi=(x+2)+(x+y+6)i$

$\begin{cases}2x+y=x+2\\3y=x+y+6\end{cases}$　$\Rightarrow$　$\begin{cases}x+y=2\\2y=x+6\end{cases}$　故 $x+y=2$

(　　) 5.設 $i=\sqrt{-1}$ 且 a 與 b 為兩實數，若 $(a+bi)(1+3i)=8+4i$，則 $(a+bi)^2=$　(A) $8i$　(B) $-8i$　(C) $8+8i$　(D) $8-8i$

【094 年歷屆試題.】

解答　B

解析　$\because$　$(a+bi)(1+3i)=8+4i$

$\Rightarrow$　$a+bi=\dfrac{8+4i}{1+3i}=\dfrac{(8+4i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}=\dfrac{20-20i}{10}=2-2i$

$\therefore$　$(a+bi)^2=(2-2i)^2=4-8i+4i^2=-8i$

(　　) 6.已知 $i=\sqrt{-1}$，設 a 為複數，若方程式 $x^2-ax-4+7i=0$ 有一根為 $2-i$，則另一根為　(A) $2-3i$　(B) $-3+2i$　(C) $2+i$　(D) $2+3i$

【龍騰自命題.】

解答　B

解析　設 $x^2-ax-4+7i=0$ 之二根為 $2-i$、α

由根與係數關係得

兩根積 $=(2-i)\alpha=\dfrac{-4+7i}{1}$　$\Rightarrow$　$\alpha=\dfrac{-4+7i}{2-i}=\dfrac{(-4+7i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=-3+2i$

(　　) 7.設 $i=\sqrt{-1}$，則 $(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i)^6=$　(A)1　(B) i　(C) $1+i$　(D) $2-i$

【龍騰自命題.】

解答 A

解析 $(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)^6=(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})^6=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$

(　　) 8.若方程式 $6x^2+(2a-3i)x+3i=0$ 有實根，其中 a 為實數，試求 a 之值為　(A) -3　(B)3　(C) $\frac{3}{2}$　(D)2

【課本練習題-自我評量.】

解答 A

解析 設此方程式的實根為 α

則 $x=\alpha$ 代入得 $6\alpha^2+(2a-3i)\alpha+3i=0$

$\Rightarrow$ $(6\alpha^2+2a\alpha)+(-3\alpha+3)i=0$

由複數的相等：$\begin{cases}6\alpha^2+2a\alpha=0\\-3\alpha+3=0\end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases}a=-3\\\alpha=1\end{cases}$

(　　) 9.下列各方程式何者有兩共軛虛根？　(A) $x^2-1=0$　(B) $x^2-3x-1=0$　(C) $x^2-3x+1=0$　(D) $x^2-3x+3=0$

【龍騰自命題.】

解答 D

(　　) 10.設 a、b 為實數且 $i=\sqrt{-1}$，若 $2+\sqrt{3}i$ 為 $2x^2+ax+b=0$ 之一根，則 $a+b=$　(A)1　(B)3　(C)6　(D)14

【095 年歷屆試題.】

解答 C

解析 $2+\sqrt{3}i$ 為 $2x^2+ax+b=0$ 之一根

又 a、b 為實數 $\Rightarrow$ 另一根為 $2-\sqrt{3}i$

由根與係數關係知 $\begin{cases}(2+\sqrt{3}i)+(2-\sqrt{3}i)=-\frac{a}{2}\\(2+\sqrt{3}i)(2-\sqrt{3}i)=\frac{b}{2}\end{cases}$

$\Rightarrow$ $4=-\frac{a}{2}$ 且 $7=\frac{b}{2}$ $\Rightarrow$ $a=-8$ 且 $b=14$

$\therefore$ $a+b=6$

(　　) 11.設 x、y 為實數，若 $x+y=-5$，且 $xy=6$，則 $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$ 之值為　(A) $-5+2\sqrt{6}$　(B) $-5-2\sqrt{6}$　(C) $5+2\sqrt{6}$　(D) $5-2\sqrt{6}$

【龍騰自命題.】

解答 B

解析 $\because$ $x+y=-5$，$xy=6$ $\Rightarrow$ x、y 皆 <0

$\Rightarrow$ $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2=x+y-2\sqrt{xy}=-5-2\sqrt{6}$

(　　) 12.展開 $(2-2i)^{20}=$　(A) 2^2　(B) $2^{30}i$　(C) $2^{30}(1-i)$　(D) -2^{30}

【龍騰自命題.】

解答 D

解析 原式 $=(2\sqrt{2})^{20}(\cos\frac{7}{4}\pi+i\sin\frac{7}{4}\pi)^{20}=2^{30}\times(\cos\pi+i\sin\pi)=-2^{30}$

(　　) 13.化簡 $\sqrt{-2}\times\sqrt{-5}\times\sqrt{-10}+\frac{\sqrt{-20}}{\sqrt{-5}}+\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{-5}}=$　(A)14　(B) $2-12i$　(C) $2-8i$　(D) -10

【龍騰自命題.】

解答 B

解析 原式 $=\sqrt{2}i\times\sqrt{5}i\times\sqrt{10}i+\frac{2\sqrt{5}i}{\sqrt{5}i}+\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}i}=10i^3+2+\frac{2}{i}=-10i+2-2i=2-12i$

(　　) 14.若 $z=\sin 10°+i\cos 10°$，則 $\mathrm{Arg}(z)=$　(A)10°　(B)80°　(C)170°　(D)350°

【龍騰自命題.】

解答 B

解析 $z=\sin 10°+i\cos 10°=\sin(90°-80°)+i\cos(90°-80°)=\cos 80°+i\sin 80°$

$\therefore$ $\text{Arg}(z)=80°$

(　　) 15.下列哪一點之極坐標與$(3,\dfrac{\pi}{5})$表同一點？ (A)$(3,\dfrac{6}{5}\pi)$ (B)$(3,\dfrac{11}{5}\pi)$ (C)$(3,\dfrac{12}{5}\pi)$ (D)$(3,\dfrac{16}{5}\pi)$

【龍騰自命題.】

解答 B

(　　) 16.設 $i=\sqrt{-1}$，則複數 $z=(1-2i)^2$的虛部為 (A)-1 (B)$-2i$ (C)$-4i$ (D)-4

【龍騰自命題.】

解答 D

(　　) 17.設 $z_1=\left(\cos\dfrac{5}{3}\pi+i\sin\dfrac{5}{3}\pi\right)^4$，$z_2=\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)^2$，則$\dfrac{z_1}{z_2}$之值為何？ (A)$-1$ (B)i (C)0 (D)1

【103 年歷屆試題.】

解答 D

解析 $z_1=\left(\cos\dfrac{5}{3}\pi+i\sin\dfrac{5}{3}\pi\right)^4=\cos\left(4\times\dfrac{5}{3}\pi\right)+i\sin\left(4\times\dfrac{5}{3}\pi\right)=\cos\dfrac{20}{3}\pi+i\sin\dfrac{20}{3}\pi$

$=\cos\left(3\times 2\pi+\dfrac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(3\times 2\pi+\dfrac{2}{3}\pi\right)=\cos\dfrac{2}{3}\pi+i\sin\dfrac{2}{3}\pi$

$z_2=\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)^2=\cos\left(2\times\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(2\times\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos\dfrac{2}{3}\pi+i\sin\dfrac{2}{3}\pi$

$\because$ $z_1=z_2$ $\therefore$ $\dfrac{z_1}{z_2}=1$

(　　) 18.$(\cos 105°+i\sin 105°)^2(\cos 75°-i\sin 75°)^2=$ (A)$\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ (B)$-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ (C)1 (D)i

【龍騰自命題.】

解答 A

解析 $\cos 75°-i\sin 75°=\cos(-75°)+i\sin(-75°)$

原式 $=[\cos(105°-75°)+i\sin(105°-75°)]^2$

$=(\cos 30°+i\sin 30°)^2=\cos 60°+i\sin 60°=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

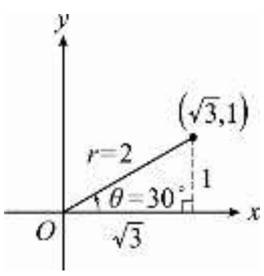
(　　)19.已知 $z_1=\sqrt{3}+i$，$z_2=1+i$，其中 $i=\sqrt{-1}$，則 $z_1{}^2z_2{}^4$ 可表示為下列哪一個？ (A)$16(\cos 240°+i\sin 240°)$ (B)$16(\cos 300°+i\sin 300°)$ (C)$16(\cos 60°+i\sin 60°)$ (D)$16(\cos 120°+i\sin 120°)$

【105 年歷屆試題.】

解答 A

解析 (1) $z_1=\sqrt{3}+i$ 的極式：

令$(x,y)=(\sqrt{3},1)$，如圖：

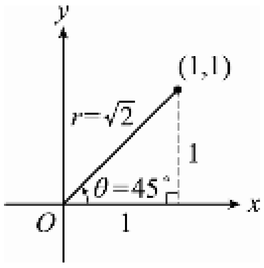


$r=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$，$\theta=30°$

則 $z_1=2(\cos 30°+i\sin 30°)$

(2) $z_2=1+i$ 的極式：

令$(x,y)=(1,1)$，如圖：



$r=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，$\theta=45°$

則 $z_2=\sqrt{2}(\cos 45°+i\sin 45°)$

由(1)和(2)：

$z_1^{\ 2}=2^2[\cos(2\times 30°)+i\sin(2\times 30°)]=4(\cos 60°+i\sin 60°)$

$z_2^{\ 4}=(\sqrt{2})^4[\cos(4\times 45°)+i\sin(4\times 45°)]=4(\cos 180°+i\sin 180°)$

故 $z_1^{\ 2}z_2^{\ 4}=4\times 4\times[\cos(60°+180°)+i\sin(60°+180°)]$

$=16(\cos 240°+i\sin 240°)$

(　　) 20.設 $z_1=7-i$，$z_2=12-5i$，則 $3z_1-2z_2=$ (A)$-3+i$ (B)$19-6i$ (C)$-3+7i$ (D)$3-7i$

【龍騰自命題.】

解答 C

(　　) 21.設 $i=\sqrt{-1}$，則 $i^1+i^2+i^3+i^4$ 之值為 (A)0 (B)i^{10} (C)i (D)-1

【隨堂測驗.】

解答 A

解析 $i^1+i^2+i^3+i^4=i+(-1)+(-i)+1=0$

(　　) 22.若 $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$，則下列何者錯誤？ (A)$|z_1\times z_2|=r_1\times r_2$ (B)$\mathrm{Arg}(z_1\times z_2)=\theta_1+\theta_2$ (C)$\mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\theta_1-\theta_2$ (D)$|z_1^{\ n}|=nr_1$

【隨堂講義補充題.】

解答 D

解析 (A) $z_1\times z_2=r_1\times r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]$ $\Rightarrow$ $|z_1\times z_2|=r_1\times r_2$

(B) $\mathrm{Arg}(z_1\times z_2)=\theta_1+\theta_2$

(C) $\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]$ $\Rightarrow$ $\mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\theta_1-\theta_2$

(D) $z_1^{\ n}=r_1^{\ n}(\cos n\theta_1+i\sin n\theta_1)$ $\Rightarrow$ $|z_1^{\ n}|=r_1^{\ n}$

(　　) 23.設 $f(x)=x^{100}+x^{50}+1$，則 $f\left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)=$ (A)1 (B)-1 (C)i (D)$-i$

【隨堂講義補充題.】

解答 D

解析 $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}=\frac{-1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i=\cos 135°+i\sin 135°$

$f\left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)$

$=f(\cos 135°+i\sin 135°)$

$=(\cos 135°+i\sin 135°)^{100}+(\cos 135°+i\sin 135°)^{50}+1$

$=(\cos 13500°+i\sin 13500°)+(\cos 6750°+i\sin 6750°)+1=(\cos 180°+i\sin 180°)+(\cos 270°+i\sin 270°)+1$

$=-1+(-i)+1=-i$

(　　) 24.設 $x=1+i$，$y=\sqrt{3}+i$，則 $x^{120}\div y^{60}=$ (A)-1 (B)1 (C)$-i$ (D)i

【隨堂講義補充題.】

解答 B

解析 $x=1+i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\sqrt{2}\left(\cos45^\circ+i\sin45^\circ\right)$

$y=\sqrt{3}+i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=2\left(\cos30^\circ+i\sin30^\circ\right)$

$\frac{x^{120}}{y^{60}}=\frac{\left(\sqrt{2}\right)^{120}\times\left(\cos5400^\circ+i\sin5400^\circ\right)}{2^{60}\times\left(\cos1800^\circ+i\sin1800^\circ\right)}=\frac{2^{60}}{2^{60}}\times\left(\cos3600^\circ+i\sin3600^\circ\right)=1$

(　　)25.設 a 、 b 為實數，$\left(\cos9^\circ+i\sin9^\circ\right)\left(\cos36^\circ+i\sin36^\circ\right)=a+bi$ ，則下列何者正確？ (A) $a+b=0$ (B) $a\times b=\frac{1}{4}$ (C) $\frac{a}{b}=1$ (D) $a\times b=1$

【隨堂測驗】

解答 C

解析 $\left(\cos9^\circ+i\sin9^\circ\right)\left(\cos36^\circ+i\sin36^\circ\right)$

$=\cos\left(9+36\right)^\circ+i\sin\left(9+36\right)^\circ=\cos45^\circ+i\sin45^\circ$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i=a+bi$

(A) $a+b=\sqrt{2}$

(B)(D) $a\times b=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}$

(C) $\frac{a}{b}=1$