1112 複數　班級　　姓名　　座號

一、單選題 (25 題 每題 4 分 共 100 分)

(　　) 1.設 $i=\sqrt{-1}$，則 $1+i+i^2+i^3+\cdots+i^{1993}+i^{1994}+i^{1995}=$ (A) -1 (B) $-i$ (C)0 (D) i

【龍騰自命題.】

解答 C

解析 $i^2=-1$，$i^4=1$

$1+i+i^2+i^3+\cdots+i^{1995}$

$=(1+i+i^2+i^3)+(i^4+i^5+i^6+i^7)+\cdots+(i^{1992}+i^{1993}+i^{1994}+i^{1995})=0$

(　　) 2.化簡 $\dfrac{-\sin 22^\circ+i\sin 112^\circ}{(\cos 63^\circ+i\sin 63^\circ)(\cos 11^\circ-i\sin 11^\circ)}$ (A) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ (B) $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ (C) i (D) $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

【龍騰自命題.】

解答 A

解析 原式 $=\dfrac{\cos 112^\circ+i\sin 112^\circ}{(\cos 63^\circ+i\sin 63^\circ)[\cos(-11^\circ)+i\sin(-11^\circ)]}=\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ$

$=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

(　　) 3.設 k 為實數，若 $x^2+(i-3)x-ki+i=0$ 有實根，則 $k=$ (A)0 (B)0 或 3 (C)1 或 4 (D)2 或 3

【龍騰自命題.】

解答 C

解析 令實根為 m，則 $m^2+(i-3)m-ki+i=0$ $\Rightarrow$ $(m^2-3m)+(m-k+1)i=0$

$\begin{cases} m^2-3m=0 \cdots ① \\ m-k+1=0 \cdots ② \end{cases}$　由① $m(m-3)=0$

$\therefore$ $m=0$ 或 3 代入②　則 $k=1$ 或 4

(　　) 4.設 $i^3+i^6+i^9+i^{12}=a+bi$，試求 $a+b$ 之值？ (A)0 (B)1 (C) -1 (D) -2

【課本練習題-自我評量.】

解答 A

解析 $i^3+i^6+i^9+i^{12}=-i-1+i+1=0$

$\therefore$ $a=b=0$ $\Rightarrow$ $a+b=0$

(　　) 5.設 $i=\sqrt{-1}$，則 $i^2+i^3+i^4+\cdots+i^{26}=$ (A) -1 (B) $-1-i$ (C) $-i$ (D) 0

【隨堂講義補充題.】

解答 A

解析 原式 $=\left[(-1)+(-i)+1+i\right]+\cdots+\left[(-1)+(-i)+1+i\right]+\left(i^4\right)^6\cdot i^2$

$=0+\cdots+0+i^2=-1$

(　　) 6.設 x、y 為實數，且 $(1+2i)x+(1-3i)y=5$，試求 x^2-y^2 之值為 (A)13 (B)5 (C) -5 (D)2

【課本練習題-自我評量.】

解答 B

解析 $(1+2i)x+(1-3i)y=5$ $\Rightarrow$ $(x+y)+(2x-3y)i=5$

$\begin{cases} x+y=5 \\ 2x-3y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$

$\therefore$ $x^2-y^2=3^2-2^2=5$

(　　) 7.設方程式 $x^2+6x+1=0$ 的兩根為 α、β，則 $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2$ 之值為 (A)4 (B)8 (C) -4 (D) -8

【龍騰自命題.】

解答 D

解析 $\because$ 兩根之和 $\alpha+\beta=-6$，兩根之積 $\alpha\beta=1$

$\therefore$ $\alpha<0$，$\beta<0$

則$(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=\alpha-2\sqrt{\alpha\beta}+\beta=-6-2=-8$

(　　) 8.設 ω 為 $x^5=1$ 之一個虛根，則$(2+\omega)(2+\omega^2)(2+\omega^3)(2+\omega^4)=$　(A)10　(B)11　(C)12　(D)13

【龍騰自命題.】

解答 B

解析 $\because\ x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$

$\therefore\ \omega^4+\omega^3+\omega^2+\omega+1=0$　且 $\omega^5=1$

故原式 $=(2+\omega)(2+\omega^4)(2+\omega^2)(2+\omega^3)$

$=(5+2\omega+2\omega^4)(5+2\omega^2+2\omega^3)$

$=25+10(\omega^4+\omega^3+\omega^2+\omega)+4(\omega^4+\omega^3+\omega^2+\omega)$

$=25-10-4=11$

(　　) 9.設 $i=\sqrt{-1}$ 且 a 與 b 為兩實數，若$(a+bi)(1+3i)=8+4i$，則$(a+bi)^2=$　(A)$8i$　(B)$-8i$　(C)$8+8i$　(D)$8-8i$

【094 年歷屆試題.】

解答 B

解析 $\because\ (a+bi)(1+3i)=8+4i$

$\Rightarrow\ a+bi=\dfrac{8+4i}{1+3i}=\dfrac{(8+4i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}=\dfrac{20-20i}{10}=2-2i$

$\therefore\ (a+bi)^2=(2-2i)^2=4-8i+4i^2=-8i$

(　　) 10.已知 $i=\sqrt{-1}$，則複數$(3-2i)(4+5i)$的實部為何？　(A)2　(B)7　(C)9　(D)22

【093 年歷屆試題.】

解答 D

解析 $(3-2i)(4+5i)=[3\times4-(-2)\times5]+[3\times5+(-2)\times4]i=22+7i$

$\therefore\ (3-2i)(4+5i)$的實部為 22

(　　) 11.若 $2+3i$ 與 4 為實係數方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 的其中兩根，則 $a+b+c=$　(A)-28　(B)-30　(C)-29　(D)-31

【龍騰自命題.】

解答 D

解析 $\because\ 2+3i$ 與 4 為實係數方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 的其中兩根

$\therefore\ 2-3i$ 為 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 的另一根

即 $x^3+ax^2+bx+c=[x-(2+3i)][x-(2-3i)](x-4)$

令 $x=1$ 帶入上式得 $1+a+b+c=(-1-3i)(-1+3i)(-3)$

$\Rightarrow\ a+b+c=-31$

(　　) 12.若 α 、 β 為方程式 $2x^2+9x+8=0$ 之兩根，試求$(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2$之值為　(A)$-5$　(B)-13　(C)$-\dfrac{1}{2}$　(D)$-\dfrac{17}{2}$

【課本練習題-自我評量.】

解答 D

解析 $a=2$，$b=9$，$c=8$

$$\begin{cases}\alpha+\beta=-\dfrac{9}{2}\\ \alpha\times\beta=4\end{cases}$$

$\therefore\ (\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha}\times\sqrt{\beta}=(\alpha+\beta)-2\sqrt{\alpha\times\beta}=-\dfrac{9}{2}-2\times\sqrt{4}=-\dfrac{17}{2}$

(　　) 13.x、y 為實數，若$(x-2i)-y(1-i)=-2+x(5-3i)$，則 $3x+2y=$　(A)-3　(B)-1　(C)2　(D)4

【龍騰自命題.】

解答 D

解析 $(x-2i)-y(1-i)=-2+x(5-3i)$　$\Rightarrow$　$(x-y)+(y-2)i=(5x-2)-3xi$

$\begin{cases}x-y=5x-2\\ y-2=-3x\end{cases}$　得 $x=0$，$y=2$，則 $3x+2y=4$

(　　) 14.設 a、b、c 為實數，若 $1-2i$ 與 3 為方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 之根，則 $a=$ (A)-5 (B)-4 (C)-3 (D)-2

【龍騰自命題.】

解答 A

解析 先找以 $1-2i$ 為根的二次方程式

令 $x=1-2i \Rightarrow x-1=-2i \Rightarrow (x-1)^2=(-2i)^2$

$\Rightarrow x^2-2x+1=-4 \Rightarrow x^2-2x+5=0$

又原式有 $x=3$ 的根 $\Rightarrow (x-3)(x^2-2x+5)=0$

$\Rightarrow x^3-5x^2+11x-15=0$

$\therefore$ $a=-5$，$b=11$，$c=-15$

〈另解〉實係數方程式有虛根必為共軛虛根

$\therefore$ 原式之三根為 $1-2i$，$1+2i$，3

根據根與係數關係

$a=-(1-2i+1+2i+3)=-5$

$b=(1-2i)(1+2i)+3(1+2i)+3(1-2i)=1+4+3+6i+3-6i=11$

$c=-(1-2i)\times(1+2i)\times 3=-(1+4)\times 3=-15$

(　　) 15.下列方程式中何者無實數解？ (A) $2x^2-3=0$ (B) $3x^2-2x-1=0$ (C) $x^2-4x+4=0$ (D) $x^2+2x+3=0$

【隨堂講義補充題.】

解答 D

解析 (A) $D=0^2-4\times 2\times(-3)=24>0$ 有實數解

(B) $D=(-2)^2-4\times 3\times(-1)=16>0$ 有實數解

(C) $D=(-4)^2-4\times 1\times 4=0$ 有相等實數解

(D) $D=2^2-4\times 1\times 3=-8<0$ 無實數解

(　　) 16.求 $\left|\dfrac{(3-i)^6}{(2+i)^4}\right|=$ (A)40 (B)45 (C)50 (D)100

【龍騰自命題.】

解答 A

解析 原式$=\dfrac{|3-i|^6}{|2+i|^4}=\dfrac{\sqrt{10}^6}{\sqrt{5}^4}=\dfrac{1000}{25}=40$

(　　) 17.若 $z_1=3-i$，$z_2=2-i$，試求$|z_1\times z_2|$之值為 (A) $5\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{10}$ (D) $\dfrac{\sqrt{2}}{5}$

【課本練習題-自我評量.】

解答 A

解析 $|z_1\times z_2|=|(3-i)(2-i)|=|6-3i-2i+i^2|=|5-5i|=\sqrt{5^2+(-5)^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

(　　) 18.設 a、b 為實數，若 $a+bi$ 與 $1-i$ 的乘積為 $1+3i$，則 $a+bi=$ (A) $-1-2i$ (B) $-1+2i$ (C) $1-2i$ (D) $1+2i$

【龍騰自命題.】

解答 B

解析 $\because$ $(a+bi)(1-i)=1+3i$

$\Rightarrow a+bi=\dfrac{1+3i}{1-i}=\dfrac{(1+3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{-2+4i}{2}=-1+2i$

(　　) 19.設複數 $z=\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2\left(\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^2$，則下列敘述何者<u>有誤</u>？ (A)$z=1$ (B)z 的實部為 1 (C)z 的虛部為 0 (D)$\bar{z}=-1$

【龍騰自命題.】

解答 D

解析 (A) $z=\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2\left(\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\left[\dfrac{(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)}{2\times 2}\right]^2=\left(\dfrac{1+3}{4}\right)^2=1$

(B)1 的實部為 1

(C)1 的虛部為 0

(D) $\bar{z}=\bar{1}=1$

(　　) 20.設 $i=\sqrt{-1}$ 且 a、b 為實數，若 $(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12})^{10}=a+bi$，則 $b-\sqrt{3}a=$ (A) -1 (B) -2 (C)1 (D)2

【096 年歷屆試題.】

解答 D

解析 $a+bi=(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12})^{10}=\cos\frac{10}{12}\pi+i\sin\frac{10}{12}\pi=\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi$

$=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

即 $a=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$b=\frac{1}{2}$

$\therefore\ b-\sqrt{3}a=\frac{1}{2}-\sqrt{3}(-\frac{\sqrt{3}}{2})=2$

(　　) 21.化簡 $(\sqrt{-2})^4\times(\sqrt{-3})^3=$ (A) $12\sqrt{3}$ (B) $-12\sqrt{3}$ (C) $12\sqrt{3}i$ (D) $-12\sqrt{3}i$

【龍騰自命題.】

解答 D

解析 $(\sqrt{-2})^4\times(\sqrt{-3})^3=(\sqrt{2}i)^4\times(\sqrt{3}i)^3=4\times3\sqrt{3}\times i^7=-12\sqrt{3}i$

(　　) 22.設 $i=\sqrt{-1}$，則複數 $z=(1-2i)^2$ 的虛部為 (A) -1 (B) $-2i$ (C) $-4i$ (D) -4

【龍騰自命題.】

解答 D

(　　) 23.已知 $i=\sqrt{-1}$ 且 a、b 為實數，若 $(2+i)(a+bi)=15+5i$，則 $a+b=$ (A)4 (B)6 (C)8 (D)10

【104 年歷屆試題.】

解答 B

解析 $(2+i)(a+bi)=15+5i$

$\Rightarrow\ a+bi=\frac{15+5i}{2+i}=\frac{5(3+i)}{2+i}=\frac{5(3+i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}$

$=\frac{5(6-3i+2i-i^2)}{2^2+1^2}=\frac{5(7-i)}{5}=7-i$

則 $a=7$，$b=-1$，故 $a+b=7+(-1)=6$

(　　) 24.設 $\theta=\frac{\pi}{30}$，則 $(\cos\theta+i\sin\theta)^{90}=$ (A) -3 (B) -1 (C) $-3i$ (D) $-i$

【龍騰自命題.】

解答 B

(　　) 25.設 $x=1+i$，$y=\sqrt{3}+i$，則 $x^{120}\div y^{60}=$ (A) -1 (B)1 (C) $-i$ (D) i

【隨堂講義補充題.】

解答 B

解析 $x=1+i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\sqrt{2}\left(\cos45^\circ+i\sin45^\circ\right)$

$y=\sqrt{3}+i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=2\left(\cos30^\circ+i\sin30^\circ\right)$

$$\frac{x^{120}}{y^{60}}=\frac{\left(\sqrt{2}\right)^{120}\times\left(\cos5400^\circ+i\sin5400^\circ\right)}{2^{60}\times\left(\cos1800^\circ+i\sin1800^\circ\right)}=\frac{2^{60}}{2^{60}}\times\left(\cos3600^\circ+i\sin3600^\circ\right)=1$$