1107 複數　　姓名　　　　　座號

一、單選題 (25 題 每題 4 分 共 100 分)

(　　) 1.方程式 $3x^2+5x+4=0$ 的根為　(A)相等二實根　(B)相異二實根　(C)共軛虛根　(D)實根

【龍騰自命題.】

解答　C

(　　) 2.若 $z=\dfrac{1+5i^{21}}{i^{13}+i^{24}}$，試求 z 的共軛複數為　(A)$3+2i$　(B)$3-2i$　(C)$2+3i$　(D)$2-3i$

【課本練習題-自我評量.】

解答　B

解析　$z=\dfrac{1+5i^{21}}{i^{13}+i^{24}}=\dfrac{1+5i}{i+1}=\dfrac{(1+5i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{1+5i-i-5i^2}{1-i^2}=\dfrac{6+4i}{2}=3+2i$

$\therefore\ \bar{z}=3-2i$

(　　) 3.設 ω 為 $x^5=1$ 之一個虛根，則 $(2+\omega)(2+\omega^2)(2+\omega^3)(2+\omega^4)=$　(A)10　(B)11　(C)12　(D)13

【龍騰自命題.】

解答　B

解析　$\because\ x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$

$\therefore\ \omega^4+\omega^3+\omega^2+\omega+1=0$　且 $\omega^5=1$

故原式 $=(2+\omega)(2+\omega^4)(2+\omega^2)(2+\omega^3)$

$=(5+2\omega+2\omega^4)(5+2\omega^2+2\omega^3)$

$=25+10(\omega^4+\omega^3+\omega^2+\omega)+4(\omega^4+\omega^3+\omega^2+\omega)$

$=25-10-4=11$

(　　) 4.問 $-3i$ 的極式為　(A)$\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi$　(B)$\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$　(C)$3(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})$　(D)$3(\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi)$

【龍騰自命題.】

解答　D

(　　) 5.設 $\dfrac{3-i}{2i}=a+bi$，其中 a、b 為實數且 $i=\sqrt{-1}$，則 $a+b$ 之值為　(A)-1　(B)-2　(C)-3　(D)-4

【龍騰自命題.】

解答　B

解析　$\dfrac{3-i}{2i}=\dfrac{3i+1}{-2}=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}i$，故 $a+b=-2$

(　　) 6.若 $z=\cos20°-i\sin20°$，則 $\text{Arg}(z)=$　(A)340°　(B)20°　(C)$-20°$　(D)70°

【龍騰自命題.】

解答　A

解析　$z=\cos20°-i\sin20°=\cos(-20°)+i\sin(-20°)$

$=\cos(-20°+360°)+i\sin(-20°+360°)=\cos340°+i\sin340°$

$\therefore\ \text{Arg}(z)=340°$

(　　) 7.問 $[3(\cos23°+i\sin23°)][4(\sin53°+i\cos53°)]=$　(A)$6+6\sqrt{3}i$　(B)$3+\sqrt{3}i$　(C)12　(D)$-12\sqrt{3}i$

【龍騰自命題.】

解答　A

解析　原式 $=3\times4(\cos23°+i\sin23°)(\cos37°+i\sin37°)$

$=12(\cos60°+i\sin60°)=6+6\sqrt{3}i$

(　　) 8.已知 $i=\sqrt{-1}$，則 $(1-i)^6=$　(A)$-8i$　(B)$8i$　(C)$12-8i$　(D)$12+8i$

【092 年歷屆試題.】

解答　B

解析　$(1-i)^6=[(1-i)^2]^3=(-2i)^3=-8i^3=8i$

《另解》

$(1-i)^6=[\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i)]^6=[\sqrt{2}(\cos\frac{7}{4}\pi+i\sin\frac{7}{4}\pi)]^6$

$=2^3(\cos\frac{21}{2}\pi+i\sin\frac{21}{2}\pi)=8(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})=8(0+i\times 1)=8i$

(　　) 9.已知複數 z 與共軛複數 $\bar{z}$ 的和為 -2，而 $\frac{1}{z}$ 的虛部為 $-\frac{1}{2}$，則複數 $z=$ (A) $2-i$ (B) $2+i$ (C) $-1+i$ (D) $-1-i$

【隨堂講義補充題.】

解答 C

解析 設 $z=a+bi$，$\bar{z}=a-bi$

$z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a=-2 \Rightarrow a=-1$

$\frac{1}{z}=\frac{1}{-1+bi}=\frac{-1-bi}{(-1+bi)(-1-bi)}=\frac{-1-bi}{1+b^2}$

而 $\frac{1}{z}$ 之虛部，即 $\frac{-b}{1+b^2}=-\frac{1}{2}$

$\Rightarrow b^2-2b+1=0 \Rightarrow b=1$

故 $z=-1+i$

(　　) 10.x、y 為實數，若 $(x-2i)-y(1-i)=-2+x(5-3i)$，則 $3x+2y=$ (A) -3 (B) -1 (C) 2 (D) 4

【龍騰自命題.】

解答 D

解析 $(x-2i)-y(1-i)=-2+x(5-3i) \Rightarrow (x-y)+(y-2)i=(5x-2)-3xi$

$\begin{cases} x-y=5x-2 \\ y-2=-3x \end{cases}$ 得 $x=0$，$y=2$，則 $3x+2y=4$

(　　) 11.下列各方程式何者有兩共軛虛根？ (A) $x^2-1=0$ (B) $x^2-3x-1=0$ (C) $x^2-3x+1=0$ (D) $x^2-3x+3=0$

【龍騰自命題.】

解答 D

(　　) 12.複數 $z=\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi$ 的標準式為 (A) $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ (B) $-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$ (C) $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ (D) $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

【龍騰自命題.】

解答 A

(　　) 13.設 a、b 為實數，且 $2+3i$ 為 $x^2+ax+b=0$ 的根，則 $b=$ (A) -13 (B) -4 (C) 4 (D) 13

【龍騰自命題.】

解答 D

解析 另一根為 $2-3i$

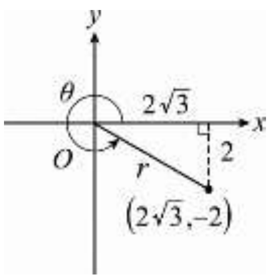
兩根積：$(2+3i)(2-3i)=b$ 　$\therefore$ $b=13$

(　　) 14.複數 $2\sqrt{3}-2i$ 的極式為 (A) $4(\cos150°+i\sin150°)$ (B) $4(\cos330°+i\sin330°)$ (C) $4(\cos300°+i\sin300°)$ (D) $2(\cos330°+i\sin330°)$

【課本練習題-自我評量.】

解答 B

解析



$\begin{cases} r=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+(-2)^2}=4 \\ \theta=360°-30°=330° \end{cases}$

$\therefore\quad 2\sqrt{3}-2i=4(\cos 330°+i\sin 330°)$

(　　　) 15.已知 a、b 為實數，$i=\sqrt{-1}$。若 $(\frac{\sqrt{3}-i}{1-i})^8=a+bi$，則 $a^2+b^2=$ (A)16 (B)64 (C)256 (D)1024

【102 年歷屆試題.】

解答 C

解析 $\because\ (\frac{\sqrt{3}-i}{1-i})^8=a+bi\quad\therefore\ |(\frac{\sqrt{3}-i}{1-i})^8|=|a+bi|$

而 $|(\frac{\sqrt{3}-i}{1-i})^8|=|\frac{\sqrt{3}-i}{1-i}|^8=(\frac{|\sqrt{3}-i|}{|1-i|})^8=(\frac{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}{\sqrt{1^2+(-1)^2}})^8$

$=(\frac{2}{\sqrt{2}})^8=(\sqrt{2})^8=[(\sqrt{2})^2]^4=2^4=16$

且 $|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$，因此 $\sqrt{a^2+b^2}=16$，故 $a^2+b^2=16^2=256$

(　　　) 16.設 $z=\frac{(5-12i)(3+4i)}{(4-3i)(12-5i)}$，$i=\sqrt{-1}$，則 $|z|$ 之值為何？ (A)1 (B)$\sqrt{2}$ (C)2 (D)13

【103 年歷屆試題.】

解答 A

解析 $|z|=\left|\frac{(5-12i)(3+4i)}{(4-3i)(12-5i)}\right|=\frac{|5-12i||3+4i|}{|4-3i||12-5i|}$

$=\frac{\sqrt{5^2+(-12)^2}\times\sqrt{3^2+4^2}}{\sqrt{4^2+(-3)^2}\times\sqrt{12^2+(-5)^2}}=\frac{13\times 5}{5\times 13}=1$

(　　　) 17.下列敘述何者正確？ (A)$(\sqrt{-2})^2=2$ (B)$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}i$ (C)$\sqrt{-2}\times\sqrt{-3}=\sqrt{6}$ (D)$\sqrt{2}\times\sqrt{-3}=\sqrt{6}i$

【龍騰自命題.】

解答 D

解析 (A)$(\sqrt{-2})^2=(\sqrt{2}i)^2=2\times(-1)=-2$

(B)$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-3}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}i}=\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{3}i}{\sqrt{3}i\times\sqrt{3}i}=\frac{\sqrt{6}i}{-3}$

(C)$\sqrt{-2}\times\sqrt{-3}=(\sqrt{2}i)\times(\sqrt{3}i)=-\sqrt{6}$

(D)$\sqrt{2}\times\sqrt{-3}=\sqrt{2}\times(\sqrt{3}i)=\sqrt{6}i$

(　　　) 18.若 α、β 為方程式 $x^2+4x+1=0$ 之兩根，則下列何者正確？ (A)$\alpha+\beta=4$ (B)$\alpha>0$，$\beta<0$ (C)$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{6}i$ (D)$\sqrt{\alpha}\times\sqrt{\beta}=\sqrt{\alpha\beta}$

【隨堂講義補充題.】

解答 C

解析 α、β 為方程式 $x^2+4x+1=0$ 之兩根

(A)$\alpha+\beta=-4$

(B)$\alpha\beta=1$

$\because\quad\alpha+\beta<0$，$\alpha\beta>0$

$\Rightarrow\quad\alpha<0$，$\beta<0$

(C)$\left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\right)^2=\left(\sqrt{\alpha}\right)^2+2\times\sqrt{\alpha}\times\sqrt{\beta}+\left(\sqrt{\beta}\right)^2$

$=\alpha+\beta-2\times\sqrt{\alpha\beta}=-4-2\sqrt{1}=-6$

故 $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{6}i$

(D)$\sqrt{\alpha}\times\sqrt{\beta}=\sqrt{-\alpha}i\times\sqrt{-\beta}i=\sqrt{\alpha\beta}i^2=-\sqrt{\alpha\beta}$

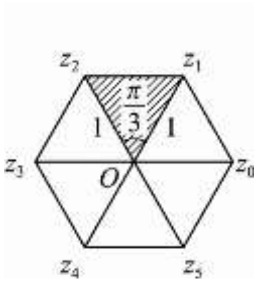
(　　　) 19.把 1 的 6 個六次方根畫在複數平面上，所形成之六邊形面積為何？ (A)3 (B)$\frac{3}{2}$ (C)$\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (D)$3\sqrt{3}$

【龍騰自命題.】

解答 C

解析 1 的 6 個六次方根在複數平面上，落在以原點為圓心，1 為半徑的圓上，形成正六邊形。

$\therefore$ 面積 $=6\times\frac{1}{2}\times1\times1\times\sin\frac{\pi}{3}=6\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

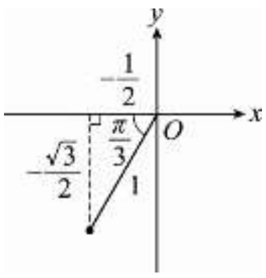


(　　) 20. $(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2})^{60}=$　(A)1　(B)-1　(C)i　(D)$-i$

【龍騰自命題.】

解答 A

解析 $(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2})^{60}=(\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)^{60}=(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3})^{60}=\cos80\pi+i\sin80\pi=1+0i=1$



(　　) 21.設 ω 為 $x^3=1$ 之一虛根，則下列各式何者錯誤？　(A)$\omega^3=1$　(B)$1+\omega+\omega^2=0$　(C)$(1+2\omega+2\omega^2)^{10}=1$　(D)$(1+\omega)(1+\omega^2)=0$

【龍騰自命題.】

解答 D

解析 (A)ω 是 $x^3=1$ 之虛根 $\Rightarrow$ 把 ω 代入方程式得 $\omega^3=1$

(B)$x^3=1\Rightarrow x^3-1=0\Rightarrow(x-1)(x^2+x+1)=0$

$\therefore$ ω 是 $x^2+x+1=0$ 之根 $\Rightarrow$ $\omega^2+\omega+1=0$

(C) $(1+2\omega+2\omega^2)^{10}=[1+2(\omega+\omega^2)]^{10}=[1+2(-1)]^{10}=(-1)^{10}=1$

(D) $(1+\omega)(1+\omega^2)=(-\omega^2)(-\omega)=\omega^3=1\neq0$

(　　) 22.化簡 $(\sqrt{-2})^4\times(\sqrt{-3})^3=$　(A)$12\sqrt{3}$　(B)$-12\sqrt{3}$　(C)$12\sqrt{3}i$　(D)$-12\sqrt{3}i$

【龍騰自命題.】

解答 D

解析 $(\sqrt{-2})^4\times(\sqrt{-3})^3=(\sqrt{2}i)^4\times(\sqrt{3}i)^3=4\times3\sqrt{3}\times i^7=-12\sqrt{3}i$

(　　) 23.化 $z=\frac{4}{\sqrt{3}+i}$ 為極式為　(A)$2(\cos330°+i\sin330°)$　(B)$2(\cos300°+i\sin300°)$　(C)$\cos210°+i\sin210°$　(D)$\cos240°+i\sin240°$

【隨堂講義補充題.】

解答 A

解析 $z=\frac{4}{\sqrt{3}+i}=\frac{4(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)}=\frac{4(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3})^2-i^2}=\sqrt{3}-i$

$=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)$（$\because$ $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin\theta=-\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $\theta=330°$）

$=2(\cos330°+i\sin330°)$

(　　) 24. $\left(\sqrt{-2}\right)^2+\sqrt{(-2)^2}$ 之值為　(A)0　(B)4　(C)$2i$　(D)$2+2i$

解答 A

解析 $\left(\sqrt{(-2)}\right)^2=\left(\sqrt{2}i\right)^2=2i^2=-2$，$\sqrt{(-2)^2}=\sqrt{4}=2$

$\therefore\ \left(\sqrt{-2}\right)^2+\sqrt{(-2)^2}=(-2)+2=0$

(　　) 25.已知 $i=\sqrt{-1}$，a 為複數，若二次方程式 $x^2-ax-4+7i=0$ 有一根為 $2-i$，則另一根為　(A) $-3+2i$　(B) $2-3i$　(C) $2+3i$　(D) $2+i$

解答 A

解析 設另一根為 α，則

$$\begin{cases}\alpha+(2-i)=-\dfrac{-a}{1}=a\\ \alpha\times(2-i)=\dfrac{-4+7i}{1}\end{cases}$$

$\therefore\ \alpha=\dfrac{-4+7i}{2-i}=\dfrac{(-4+7i)(2+i)}{5}=\dfrac{-8-4i+14i-7}{5}=-3+2i$