1106　　複數　姓名　　　座號

一、單選題 (25 題 每題 4 分 共 100 分)

(　　) 1.下列何者正確？ (A)$4+3i>1+5i$ (B)$0>-1-2i$ (C)$\sqrt{2}>i^4$ (D)$-\sqrt{2}>i^2$

【龍騰自命題.】

解答 C

(　　) 2.若 $z=2+i$，則$|z-\frac{1}{z}|=$ (A)1 (B)2 (C)3 (D)4

【龍騰自命題.】

解答 B

解析 $|z-\frac{1}{z}|=|2+i-\frac{1}{2+i}|=|2+i-\frac{2-i}{5}|=|\frac{8}{5}+\frac{6}{5}i|=\sqrt{(\frac{8}{5})^2+(\frac{6}{5})^2}=2$

(　　) 3.設 ω 為 $x^5=1$ 之一個虛根，則$(2+\omega)(2+\omega^2)(2+\omega^3)(2+\omega^4)=$ (A)10 (B)11 (C)12 (D)13

【龍騰自命題.】

解答 B

解析 $\because$ $x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$

$\therefore$ $\omega^4+\omega^3+\omega^2+\omega+1=0$ 且 $\omega^5=1$

故原式 $=(2+\omega)(2+\omega^4)(2+\omega^2)(2+\omega^3)$

$=(5+2\omega+2\omega^4)(5+2\omega^2+2\omega^3)$

$=25+10(\omega^4+\omega^3+\omega^2+\omega)+4(\omega^4+\omega^3+\omega^2+\omega)$

$=25-10-4=11$

(　　) 4.設 $z=i(2+i)(1+2i)$，則$|z|=$ (A)3 (B)4 (C)5 (D)25

【龍騰自命題.】

解答 C

(　　) 5.已知 $i=\sqrt{-1}$，設 a 為複數，若方程式 $x^2-ax-4+7i=0$ 有一根為 $2-i$，則另一根為 (A)$2-3i$ (B)$-3+2i$ (C)$2+i$ (D)$2+3i$

【龍騰自命題.】

解答 B

解析 設 $x^2-ax-4+7i=0$ 之二根為 $2-i$、 α

由根與係數關係得

兩根積$=(2-i)\alpha=\frac{-4+7i}{1}$ $\Rightarrow$ $\alpha=\frac{-4+7i}{2-i}=\frac{(-4+7i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=-3+2i$

(　　) 6.已知複數 z 與共軛複數 $\bar{z}$ 的和為 -2，而 $\frac{1}{z}$ 的虛部為 $-\frac{1}{2}$，則複數 $z=$ (A)$2-i$ (B)$2+i$ (C)$-1+i$ (D)$-1-i$

【隨堂講義補充題.】

解答 C

解析 設 $z=a+bi$ ，$\bar{z}=a-bi$

$z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a=-2$ $\Rightarrow$ $a=-1$

$\frac{1}{z}=\frac{1}{-1+bi}=\frac{-1-bi}{(-1+bi)(-1-bi)}=\frac{-1-bi}{1+b^2}$

而 $\frac{1}{z}$ 之虛部，即 $\frac{-b}{1+b^2}=-\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ $b^2-2b+1=0$ $\Rightarrow$ $b=1$

故 $z=-1+i$

(　　) 7.令 $i=\sqrt{-1}$。若 $1+i$ 為方程式 $2x^2+kx+6+2i=0$ 的一根，則 $k=$ (A)-6 (B)-4 (C)$-5+i$ (D)$-10+2i$

【099 年歷屆試題.】

解答 A

解析 $\because$ $1+i$ 為 $2x^2+kx+6+2i=0$ 的根 $\therefore$ $2(1+i)^2+k(1+i)+6+2i=0$

$\Rightarrow\quad 2(2i)+k(1+i)+6+2i=0 \quad\Rightarrow\quad k(1+i)=-6-6i$

$\Rightarrow\quad k=\dfrac{-6-6i}{1+i}=\dfrac{-6(1+i)}{1+i}=-6$

故選(A)

(　　) 8.化複數 $z=(\dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i})^6$ 為標準式可寫成　(A)$1-\sqrt{3}i$　(B)$\dfrac{1}{4}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}i$　(C)$\dfrac{i}{8}$　(D)$\sqrt{2}+\sqrt{2}i$

【龍騰自命題.】

解答　C

解析　$z=(\dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i})^6=[\dfrac{\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})}{2(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})}]^6=[\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12})]^6$

$=\dfrac{1}{8}(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2})=\dfrac{i}{8}$

(　　) 9.若複數 $z=2(\sin73°+i\cos253°)$，則 $\mathrm{Arg}(z)=$　(A)343°　(B)73°　(C)253°　(D)326°

【龍騰自命題.】

解答　A

解析　$\because\quad z=2(\sin73°-i\cos73°)=2(\cos17°-i\sin17°)=2[\cos(-17°)+i\sin(-17°)]$

$=2[\cos(343°)+i\sin(343°)]$

$\therefore\quad \mathrm{Arg}(z)=343°$

(　　) 10.設 $z=a+bi$，其中 $a=1$，而 $\dfrac{1}{z}$ 之虛部為 $\dfrac{1}{2}$，則 $z=$　(A)$1+i$　(B)$i-1$　(C)$1-i$　(D)$-1-i$

【龍騰自命題.】

解答　C

解析　$\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{1+bi}=\dfrac{1-bi}{1+b^2}$　又 $\dfrac{-b}{1+b^2}=\dfrac{1}{2}$　$\Rightarrow\quad -2b=1+b^2\quad\Rightarrow\quad (b+1)^2=0$

$\therefore\quad b=-1$　故 $z=1-i$

(　　) 11.設 a、b 為實數，且 $2+3i$ 為 $x^2+ax+b=0$ 的根，則 $b=$　(A)-13　(B)-4　(C)4　(D)13

【龍騰自命題.】

解答　D

解析　另一根為 $2-3i$

兩根積：$(2+3i)(2-3i)=b$　　$\therefore\quad b=13$

(　　) 12.已知 $i=\sqrt{-1}$，若方程式 $x^2-x-a+3i=0$ 有一根 $2-i$，則 a 之值為　(A)1　(B)0　(C)-1　(D)-2

【隨堂講義補充題.】

解答　A

解析　$\because\quad x=2-i$ 為 $x^2-x-a+3i=0$ 之根

$\Rightarrow$　代入使等號成立

$\Rightarrow\quad (2-i)^2-(2-i)-a+3i=0$

$\Rightarrow\quad 4-4i+i^2-2+i-a+3i=0$

$\Rightarrow\quad (1-a)+0i=0+0i$ 得 $a=1$

(　　) 13.使 $z^2=-3+4i$ 之複數 z 為　(A)$1+2i$，$-1-2i$　(B)$1+3i$，$-1-3i$　(C)$1+\sqrt{2}i$，$-1-\sqrt{2}i$　(D)$2+\sqrt{2}i$，$-2-\sqrt{2}i$

【龍騰自命題.】

解答　A

解析　設 $z=a+bi$

$\because\quad z^2=-3+4i$　　$\therefore\quad (a+bi)^2=a^2-b^2+2abi=-3+4i$

即 $\begin{cases}a^2-b^2=-3\\2ab=4\end{cases}$　$\Rightarrow$　$\begin{cases}a=1\\b=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-1\\b=-2\end{cases}$　　$\therefore\quad z=1+2i$ 或 $-1-2i$

(　　　) 14.設 $z=8i-6$ 的極式為 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$，則下列何者正確？ (A)$r=2$ (B)$\cos\theta=\frac{4}{5}$ (C)$\sin\theta=\frac{4}{5}$ (D)$\sin\theta=-\frac{3}{5}$

【龍騰自命題.】

解答 C

解析 $r=|z|=10 \Rightarrow z=-6+8i=10(-\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i)=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

故 $r=10$，$\cos\theta=-\frac{3}{5}$，$\sin\theta=\frac{4}{5}$

(　　　) 15.若 $z=\sin10°+i\cos10°$，則 $\mathrm{Arg}(z)=$ (A)10° (B)80° (C)170° (D)350°

【龍騰自命題.】

解答 B

解析 $z=\sin10°+i\cos10°=\sin(90°-80°)+i\cos(90°-80°)=\cos80°+i\sin80°$

$\therefore\ \mathrm{Arg}(z)=80°$

(　　　) 16.試求 $(\frac{\sqrt{3}+i}{2})^{12}$ 之值？ (A)-1 (B)1 (C)$-i$ (D)i

【課本練習題-自我評量.】

解答 B

解析 $\frac{\sqrt{3}+i}{2}=\cos30°+i\sin30°$

$\therefore\ (\frac{\sqrt{3}+i}{2})^{12}=(\cos30°+i\sin30°)^{12}=\cos360°+i\sin360°=1$

(　　　) 17.設 $z=-2+i$，則 $|z|=$ (A)1 (B)3 (C)5 (D)$\sqrt{5}$

【隨堂講義補充題.】

解答 D

解析 $|z|=|-2+i|=\sqrt{(-2)^2+1^2}=\sqrt{5}$

(　　　) 18.已知 $i=\sqrt{-1}$。若 $z=\cos78°+i\sin78°$，則 $z^{15}=$ (A)$-i$ (B)-1 (C)i (D)1

【100 年歷屆試題.】

解答 C

解析 $z^{15}=(\cos78°+i\sin78°)^{15}=\cos(15\times78°)+i\sin(15\times78°)$

$=\cos1170°+i\sin1170°=\cos(3\times360°+90°)+i\sin(3\times360°+90°)$

$=\cos90°+i\sin90°=0+i=i$

(　　　) 19.設 $i=\sqrt{-1}$，則 $i^3+2i^4+3i^5+4i^6=$ (A)0 (B)$5+5i$ (C)$-2+2i$ (D)$3-7i$

【龍騰自命題.】

解答 C

(　　　) 20.化 $z=\frac{4}{\sqrt{3}+i}$ 為極式為 (A)$2(\cos330°+i\sin330°)$ (B)$2(\cos300°+i\sin300°)$ (C)$\cos210°+i\sin210°$ (D)$\cos240°+i\sin240°$

【隨堂講義補充題.】

解答 A

解析 $z=\frac{4}{\sqrt{3}+i}=\frac{4(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)}=\frac{4(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3})^2-i^2}=\sqrt{3}-i$

$=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)$（$\because\ \cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin\theta=-\frac{1}{2} \Rightarrow \theta=330°$）

$=2(\cos330°+i\sin330°)$

(　　　) 21. $\left(2i^3\right)^6\times\left(\frac{1}{8}i\right)^2=$　(A) $2i$　(B) 1　(C) -1　(D) $-2i$

【隨堂測驗.】

解答　B

解析　原式 $=2^6\times(-i)^6\times\left(\frac{1}{8}\right)^2\times i^2=64\times(-1)\times\frac{1}{64}\times(-1)=1$

(　　　) 22.設 z 為複數，若 $|z-1|=2$，且 $z-1$ 的主輻角為 240°，則複數 z 為何？　(A) $\sqrt{3}i$　(B) $-\sqrt{3}i$　(C) $1+\sqrt{3}i$　(D) $1-\sqrt{3}i$

【隨堂講義補充題.】

解答　B

解析　利用極式可得

$z-1=|z-1|\times(\cos240^\circ+i\sin240^\circ)$

$\Rightarrow\ z-1=2\times\left(\frac{-1}{2}+\frac{-\sqrt{3}}{2}i\right)$

$\Rightarrow\ z-1=-1-\sqrt{3}i$

$\Rightarrow\ z=-\sqrt{3}i$

(　　　) 23.設 a 為實數，若 $3x^2+(a+i)x+2i-6=0$ 有實根，則 $a=$　(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 3

【隨堂測驗.】

解答　D

解析　$3x^2+ax+xi+2i-6=0$

$\Rightarrow\ 3x^2+ax-6+(x+2)i=0$

令 $x+2=0\ \Rightarrow\ x=-2$ 代入

$3(-2)^2+a(-2)-6=0$

$\Rightarrow\ 12-2a-6=0$

$\Rightarrow\ 2a=6$

$\Rightarrow\ a=3$

(　　　) 24.已知 $i=\sqrt{-1}$，試求 $-4i$ 的平方根為　(A) $\pm\sqrt{2}(1-i)$　(B) $\pm\sqrt{2}(1+i)$　(C) $\pm2(1-i)$　(D) $\pm2(1+i)$

【隨堂講義補充題.】

解答　A

解析　$x^2=-4i=4(0-i)=4(\cos270^\circ+i\sin270^\circ)$

由複數 n 次方根：

$z_k=\sqrt{4}\left(\cos\frac{2k\pi+270^\circ}{2}+i\sin\frac{2k\pi+270^\circ}{2}\right)$，$k=0$，$1$

$z_0=2(\cos135^\circ+i\sin135^\circ)=-\sqrt{2}+\sqrt{2}i=-\sqrt{2}(1-i)$

$z_1=2(\cos315^\circ+i\sin315^\circ)=\sqrt{2}-\sqrt{2}i=\sqrt{2}(1-i)$

故其平方根為 $\pm\sqrt{2}(1-i)$

(　　　) 25.設 ω 為 $x^3=1$ 之一虛根，則 $2+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\omega^5+\omega^6$ 之值為　(A) 1　(B) -1　(C) 2　(D) 3

【隨堂測驗.】

解答　C

解析　$\omega^3=1$ 且 $\omega^2+\omega+1=0$

原式 $=1+(1+\omega+\omega^2)+1+\omega^4(1+\omega+\omega^2)$

$=1+0+1+\omega^4\times0=1+1=2$