

1105 式的運算與聯立方程式

班級 姓名 座號

一、單選題 (25 題 每題 4 分 共 100 分)

() 1. 設 x 、 y 、 k 均為實數，若 $|x+1|+|2x-y+4|+|x+3y+k|=0$ ，則 k 之值為何？ (A)3 (B)1 (C)-4 (D)-5

【103 年歷屆試題】

解答 D

解析 從題意可知

$$\begin{cases} x+1=0 \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 2x-y+4=0 \cdots \cdots \textcircled{2} \\ x+3y+k=0 \cdots \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

由①得 $x=-1$

$$x=-1 \text{ 代入 } \textcircled{2} \text{ 得 } 2(-1)-y+4=0 \Rightarrow y=2$$

$$x=-1, y=2 \text{ 代入 } \textcircled{3} \text{ 得 } -1+3 \times 2+k=0 \Rightarrow k=-5$$

() 2. 若 $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ x-1 & 2 & 4 \\ x-2 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 0$ ，則 $x =$ (A)-1 (B)0 (C)1 (D)2

【092 年歷屆試題】

解答 A

解析

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ x-1 & 2 & 4 \\ x-2 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ x-1 & 2 & 0 \\ x-2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{依第三行降階})$$

$\begin{matrix} \uparrow \\ \times(-2) \end{matrix}$

$$\Rightarrow (-1) \times \begin{vmatrix} x & 1 \\ x-1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (-1) \times [2x - (x-1)] = 0$$

$$\therefore x = -1$$

《註》本題亦可由三階行列式直接展開來求 x 值

() 3. 設 a 、 b 、 c 、 d 為實數，若 x^2-1 為 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 之因式，且 $f(x)$ 除以 $x-2$ 餘 6，則 $2a+b =$ (A)-4 (B)-2 (C)2 (D)4

【099 年歷屆試題】

解答 C

解析 $\because x^2-1$ 為 $f(x)$ 的因式且 $x^2-1=(x+1)(x-1)$

$\therefore x+1$ 與 $x-1$ 皆為 $f(x)$ 的因式

$$\Rightarrow f(-1)=0, f(1)=0$$

$$\text{即 } f(-1)=-a+b-c+d=0 \cdots \textcircled{1}$$

$$f(1)=a+b+c+d=0 \cdots \textcircled{2}$$

$\because f(x)$ 除以 $x-2$ 餘 6 $\therefore f(2)=6$

$$\text{即 } f(2)=8a+4b+2c+d=6 \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \quad 2b+2d=0 \Rightarrow d=-b$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{1} \quad 2a+2c=0 \Rightarrow c=-a$$

以 $d=-b, c=-a$ 代入③得

$$8a+4b+2(-a)+(-b)=6 \Rightarrow 6a+3b=6 \xrightarrow{\div 3} 2a+b=2$$

故選(C)

() 4. 求 $2x^3+x^2-4$ 除以 x^2+2x-1 的商式為 (A) $2x-3$ (B) $2x-1$ (C) $2x+1$ (D) $2x+3$

【隨堂講義補充題】

解答 A

$$\begin{array}{r}
 2x^3 + x^2 + 0x - 4 \\
 \underline{2x^3 + 4x^2 - 2x} \\
 4x^2 - 2x - 4 \\
 \underline{-3x^2 + 2x - 4} \\
 - 6x + 3 \\
 \underline{8x - 7}
 \end{array}$$

∴ 商式為 $2x-3$

() 5. 已知 $x^4 + x^3 + ax + b$ 除以 $x^2 + 1$ 的餘式是 $-2x + 1$ ，則數對 (a, b) 為 (A)(0, -1) (B)(-1, 0) (C)(1, -1) (D)(-1, 1)

【隨堂講義補充題.】

解答 B

$$\begin{array}{r}
 x^4 + x^3 + 0x^2 + ax + b \\
 \underline{x^4 + 0x^3 + x^2} \\
 x^3 - x^2 + ax \\
 \underline{x^3 + 0x^2 + x} \\
 \underline{-x^2 + (a-1)x + b} \\
 \underline{-x^2 + 0x - 1} \\
 \underline{(a-1)x + b + 1}
 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-1 = -2 \\ b+1 = 1 \end{cases}$$

解得 $a = -1, b = 0$

∴ $(a, b) = (-1, 0)$

() 6. 若 $f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + x + 19$ ，則 $f(2.002)$ (求到小數點後第三位) 之近似值為 (A)17.172 (B)17.203 (C)17.924 (D)17.002

【龍騰自命題.】

解答 D

解析

$$\begin{array}{r}
 1 \ -3 \ +1 \ +1 \ +19 \ | \ 2 \\
 \underline{+2 \ -2 \ -2 \ -2} \\
 1 \ -1 \ -1 \ -1 \ \ | \ 17 \\
 \underline{+2 \ +2 \ +2} \\
 1 \ +1 \ +1 \ \ | \ 1 \\
 \underline{+2 \ +6} \\
 1 \ +3 \ \ | \ 7 \\
 \underline{+2} \\
 1, 5
 \end{array}$$

$$f(x) = (x-2)^4 + 5(x-2)^3 + 7(x-2)^2 + (x-2) + 17$$

$$f(2.002) \approx 7 \times (2.002 - 2)^2 + (2.002 - 2) + 17 \approx 17.002$$

() 7. 設 $(2x^3 - 3x + 1) - (3x^3 + 2x^2 + 2) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ，其中 a, b, c, d 為常數，則 $ad + bc =$ (A)12 (B)9 (C)7 (D)5

【龍騰自命題.】

解答 C

() 8. 化簡 $\frac{1}{\sqrt[3]{4}-1}$ 為 (A) $\frac{\sqrt[3]{4}+1}{3}$ (B) $\frac{\sqrt[3]{4}+1}{5}$ (C) $\frac{\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{4}+1}{5}$ (D) $\frac{\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{4}+1}{3}$

【隨堂測驗.】

解答 D

$$\text{解析 原式} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}-1} \times \frac{\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{4}+1}{\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{4}+1} = \frac{\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{4}+1}{(\sqrt[3]{4})^3-1^3} = \frac{\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{4}+1}{3}$$

() 9. 下列各方程式何者有兩相異實根？ (A) $x^2 + 4 = 0$ (B) $x^2 - x + 4 = 0$ (C) $x^2 - 5x + 4 = 0$ (D) $x^2 - x + 1 = 0$

【龍騰自命題.】

解答 C

() 10. 化簡 $\sqrt{10+2\sqrt{21}}$ = (A) $\sqrt{7} + \sqrt{3}$ (B) $\sqrt{7} - \sqrt{3}$ (C) $\sqrt{5} + \sqrt{2}$ (D) $\sqrt{5} - \sqrt{2}$

解答 A

$$\text{解析 } \sqrt{10+2\sqrt{21}} = \sqrt{(\sqrt{7}+\sqrt{3})^2} = \sqrt{7} + \sqrt{3}$$

() 11. 方程式 $a(8x-4) = 3(ax-5) + a(3-5x)$ 之解為 $x=1$ ，則 $a =$ (A)-2 (B)-3 (C)-4 (D)-5

【隨堂講義補充題.】

解答 D

解析 $x=1$ 代入方程式

$$a(8-4) = 3(a-5) + a(3-5)$$

$$\Rightarrow 3a = -15$$

$$\Rightarrow a = -5$$

() 12. 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} =$ (A)10 (B)2 (C)-10 (D)-15

【隨堂測驗.】

解答 C

解析 原式 $= 1 \times (-4) - 3 \times 2 = -10$

() 13. 方程式 $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$ 的正根為 (A)1、2、3 (B)1、2 (C)1、3 (D)2、3 (E)3

【課本練習題-自我評量.】

解答 C

解析 多項式 $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ 的可能因式有 $x \pm 1$ 、 $x \pm 2$ 、 $x \pm 3$ 、 $x \pm 6$

$$\because f(1) = 1 - 2 - 5 + 6 = 0$$

$$\therefore f(x) \text{ 有因式 } x-1$$

$$\Rightarrow (x-1)(x^2 - x - 6) = 0 \Rightarrow (x-1)(x-3)(x+2) = 0$$

三個根為 1、3、-2

其中正根為 1、3

() 14. 若 $\frac{x-1}{x^3+ax+1}$ 不是最簡分式，則 $a =$ (A)-2 (B)-1 (C)0 (D)1

【龍騰自命題.】

解答 A

解析 $\frac{x-1}{x^3+ax+1}$ 不是最簡分式 $\Rightarrow x-1$ 是 x^3+ax+1 的因式

$$x=1 \text{ 代入分母 } \Rightarrow 1+a+1=0 \Rightarrow a=-2$$

() 15. x 為整數，若 $\begin{vmatrix} x & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 3 & -x & 1 \end{vmatrix} = -15$ ，則 $x =$ (A) $\frac{2}{5}$ (B)2 (C) $\frac{2}{5}$ 或 2 (D) $\frac{5}{2}$ 或 -2 (E)-2

【課本練習題-自我評量.】

解答 B

$$\text{解析 } \begin{vmatrix} x & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 3 & -x & 1 \end{vmatrix} = -15$$

$$\Rightarrow 0 - 15 - 12x - 0 + 5x^2 + 4 = -15 \Rightarrow 5x^2 - 12x + 4 = 0$$

$$\Rightarrow (5x-2)(x-2) = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{5} \text{ 或 } x = 2$$

但是 x 為整數，故取 $x=2$

() 16. 行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 17 & -28 & 19 \\ 16 & 24 & -8 \end{vmatrix}$ 的值為 (A)-96 (B)0 (C)-1 (D)10 (E)6

解答 B

解析 原式 = $8 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 17 & -28 & 19 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$ (第一列與第三列成比例) = $8 \times 0 = 0$

() 17. $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ ax+by=10 \end{cases}$ 有無限多組解，則 $a+b=$ (A)5 (B)10 (C)15 (D)20 (E)0

【課本練習題-自我評量.】

解答 B**解析** \because 方程組有無限多組解

$$\therefore \Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$$

$$\text{即} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 10 & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ a & 10 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 5b-30=0 \\ 20-5a=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=6 \end{cases}$$

$$\text{故 } a+b=4+6=10$$

() 18. 已知 $f(x) = (2x^3 + 4x^2 + x + 1)(3x^2 - 5x + 2)$ ，則下列敘述何者有誤？ (A) $\deg f(x) = 5$ (B) $f(0) = 2$ (C) 展開式中， x^2 項係數為 6 (D) 展開式中，各項係數和為 8

【龍騰自命題.】

解答 D

解析 $f(x) = (2x^3 + 4x^2 + x + 1)(3x^2 - 5x + 2)$

$$(A) \deg f(x) = 3 + 2 = 5$$

$$(B) f(0) = 1 \times 2 = 2$$

$$(C) x^2 \text{ 項係數} = 4 \times 2 + 1 \times (-5) + 1 \times 3 = 6$$

$$(D) \text{ 各項係數和} = f(1) = (2 + 4 + 1 + 1)(3 - 5 + 2) = 0$$

() 19. $(x^2 + 3x + 5)(3x^2 - 2x - 4)$ 的展開式中， x^2 項的係數為 (A)5 (B)6 (C)10 (D)19

【龍騰自命題.】

解答 A

() 20. 設 $\frac{2x^3 - x^2 + 1}{(x-2)^4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{(x-2)^3} + \frac{D}{(x-2)^4}$ ，則 $A - B + C - D =$ (A)-2 (B)-4 (C)-6 (D)-8

【龍騰自命題.】

解答 A**解析** 根據連續綜合除法

$$2x^3 - x^2 + 1 = 2(x-2)^3 + 11(x-2)^2 + 20(x-2) + 13$$

$$\Rightarrow \frac{2x^3 - x^2 + 1}{(x-2)^4} = \frac{2}{x-2} + \frac{11}{(x-2)^2} + \frac{20}{(x-2)^3} + \frac{13}{(x-2)^4}$$

$$\therefore A = 2, B = 11, C = 20, D = 13$$

$$\text{故 } A - B + C - D = 2 - 11 + 20 - 13 = -2$$

$$\begin{array}{r} 2-1+ 0+ 1 \mid 2 \\ \quad +4+ 6+12 \\ \hline 2+3+ 6 \mid +13 \\ \quad +4+14 \\ \hline 2+7 \mid +20 \\ \quad +4 \\ \hline 2 \mid +11 \end{array}$$

() 21. 設 a, b, c 均為實數，若 $(a-b)(b-c)(c-a) = -2$ ，則 $\begin{vmatrix} 2a & b & b \\ 6c & 3c & 3b \\ 2c-2a & c-a & c-a \end{vmatrix}$ 之值為何？ (A)-12 (B)-6 (C)6 (D)12

【105 年歷屆試題.】

解答 D

解析

$$\text{原式} = \begin{vmatrix} 2a & b & b \\ 2 \times 3 \times c & 3c & 3b \\ 2(c-a) & c-a & c-a \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{(第一行提出2,} \\ \text{第二列提出3,} \\ \text{第三列提出}(c-a)\text{)} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \times(-1) \\ \hline \times(-1) \\ \hline \downarrow \downarrow \end{array}$$

$$= 2 \times 3 \times (c-a) \times \begin{vmatrix} a & b & b \\ c & c & b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 6(c-a) \times \begin{vmatrix} a & b-a & b-a \\ c & 0 & b-c \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{(第三列降階展開)}$$

$$= 6(c-a) \times 1 \times \begin{vmatrix} b-a & b-a \\ 0 & b-c \end{vmatrix} \quad \text{(第一列提出}(b-a)\text{)}$$

$$= 6(c-a) \times (b-a) \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & b-c \end{vmatrix}$$

$$= 6(c-a)(b-a) \times [1 \times (b-c) - 0 \times 1]$$

$$= 6(c-a)(b-a)(b-c) = 6(c-a) \underline{[-(a-b)]} (b-c)$$

$$= -6(a-b)(b-c)(c-a) = -6 \times (-2) = 12$$

- () 22. 設 t 為實數，且三元一次聯立方程式 $\begin{cases} (t+1)x + (t-1)z = 1 \\ (t+1)y + z = 3 \\ (t+1)y + tz = 5 \end{cases}$ 無解，則 t 可為下列何者？ (A)-2 (B)0 (C)1 (D)2

【106年歷屆試題】

解答 C

解析

$$\text{原方程組：} \begin{cases} (t+1)x + 0y + (t-1)z = 1 \\ 0x + (t+1)y + z = 3 \\ 0x + (t+1)y + tz = 5 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} t+1 & 0 & t-1 \\ 0 & t+1 & 1 \\ 0 & t+1 & t \end{vmatrix} \quad \text{(第一、二行提出}(t+1)\text{)}$$

$$= (t+1)^2 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & t-1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & t \end{vmatrix} \quad \text{(第一行降階展開)}$$

$$= (t+1)^2 \times 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = (t+1)^2 \times 1 \times (1 \times t - 1 \times 1) = (t+1)^2 (t-1)$$

若 $\Delta = 0$ ，則 $t = -1$ 或 1

$$\text{(1) 當 } t = -1 \text{ 時：原方程組：} \begin{cases} -2z = 1 \\ z = 3 \quad \text{無解} \\ -z = 5 \end{cases}$$

$$\text{(2) 當 } t = 1 \text{ 時：原方程組：} \begin{cases} 2x = 1 \\ 2y + z = 3 \quad \text{無解} \\ 2y + z = 5 \end{cases}$$

由(1)和(2)可知：

當方程組無解時， t 可為 -1 或 1

故選(C)

- () 23. 方程式 $\frac{x}{x+1} = 1$ 的解為 $x =$ (A)-1 (B)0 (C)1 (D)無解

解答 D

() 24. 行列式 $\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} =$ (A)-9 (B)-7 (C)3 (D)5

【隨堂講義補充題.】

解答 B

解析 所求 $= (-2) \times (-4) - 3 \times 5 = -7$

() 25. 設 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 3$, 且 $\begin{vmatrix} x & y \\ c & d \end{vmatrix} = 4$, 則 $\begin{vmatrix} 4a+3x & 4b+3y \\ 5c & 5d \end{vmatrix} =$ (A)30 (B)60 (C)90 (D)120 【隨堂講義補充題.】

解答 D

解析 所求 $= \begin{vmatrix} 4a & 4b \\ 5c & 5d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3x & 3y \\ 5c & 5d \end{vmatrix} = 20 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + 15 \begin{vmatrix} x & y \\ c & d \end{vmatrix} = 20 \times 3 + 15 \times 4 = 120$