

一、單選題 (20 題 每題 4 分 共 80 分)

- () 1. 設 $f(x) = x^2 - 2x + 5$, $g(x) = a(x-1)(x-2) + b(x-2)(x-3) + c(x-5)(x-1)$, 若不論 x 為任意實數, 恆使 $f(x) = g(x)$, 求 $a + b + c =$ (A) -2 (B) 2 (C) -1 (D) 1

【龍騰自命題.】

解答 D

- () 2. 設 $\frac{2x+1}{(x-1)^2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2}$, 則 $a + b =$ (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7

【龍騰自命題.】

解答 B

- () 3. 若 $\frac{1}{x(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2}$, 求 $A + B =$ (A) 0 (B) 1 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $-\frac{1}{2}$

【龍騰自命題.】

解答 A

- () 4. 設 $f(x) = 100x^5 - 318x^4 - 228x^3 - 311x^2 - 256x + 88$, 則 $f(4) =$ (A) -308 (B) 88 (C) 488 (D) 518

【隨堂測驗.】

解答 C

解析 利用綜合除法：

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 100 & -318 & -228 & -311 & -256 & +88 & \\ & +400 & +328 & +400 & +356 & +400 & \\ \hline 100 & +82 & +100 & +89 & +100 & +488 & \end{array}$$

$\therefore f(4) = 488$

- () 5. 設 $f(x) = (a-3)x^2 + (b+2)x + c - 1$, 若 $f(2) = f(3) = f(4) = 5$, 則 $a + b + c =$ (A) 11 (B) 9 (C) 8 (D) 7

【隨堂講義補充題.】

解答 D

解析 $\because f(x)$ 之次數, 即 $\deg f(x) = 2$, 但卻有相異三個 $x = 2, 3, 4$, 均使 $f(x)$ 之值等於 5

\therefore 由多項式恆等定理知 $f(x) = 5$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-3=0 \\ b+2=0 \\ c-1=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-2 \\ c=6 \end{cases}$$

故 $a + b + c = 3 + (-2) + 6 = 7$

- () 6. 若 $\frac{x^4 - 4x^3 + 2x^2 + px + q}{x^2 - x - 2}$ 能化簡為 x 之二次式, 則 $p + q$ 之值為 (A) -3 (B) -1 (C) 3 (D) 2

【龍騰自命題.】

解答 C

解析 $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$

\therefore 能化為 x 的二次式 $\therefore (x-2), (x+1)$ 為 $x^4 - 4x^3 + 2x^2 + px + q$ 之因式

$$\begin{cases} 16 - 32 + 8 + 2p + q = 0 \\ 1 + 4 + 2 - p + q = 0 \end{cases} \text{ 得 } p = 5, q = -2, \text{ 故 } p + q = 3$$

- () 7. 多項式 $f(x)$ 以 $x-1$ 除之餘 2, 以 $x+2$ 除之餘 -7, 若以 $(x-1)(x+2)$ 除 $f(x)$ 得餘式為 $r(x)$, 則 $r(2) =$ (A) 2 (B) 5 (C) 7 (D) 9

【龍騰自命題.】

解答 B

解析 令 $r(x) = ax + b$

$f(x) = (x-1)(x+2) \times p(x) + (ax+b)$ 又 $f(1) = 2, f(-2) = -7$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=2 \\ -2a+b=-7 \end{cases} \text{ 得 } a=3, b=-1, \text{ 故 } r(2) = 3 \times 2 + (-1) = 5$$

() 8. 求方程式 $x^2 + 2|x| - 15 = 0$ 之兩根的平方和為 (A)14 (B)18 (C)15 (D)10

【龍騰自命題.】

解答 B

解析 $\because x^2 = |x|^2 \quad \therefore x^2 + 2|x| - 15 = 0$
 $\Rightarrow |x|^2 + 2|x| - 15 = 0 \Rightarrow (|x| + 5)(|x| - 3) = 0 \Rightarrow |x| = 3$ 或 -5 (不合)
即 $|x| = 3 \Rightarrow x = \pm 3$, 兩根的平方和為 $3^2 + (-3)^2 = 18$

() 9. 設 $\sqrt{4 + \sqrt{12}}$ 的整數部分為 a , 小數部分為 b , 則 $\frac{1}{a+b} - \frac{1}{b} =$ (A)-1 (B)1 (C)0 (D)2

【龍騰自命題.】

解答 A

解析 $\sqrt{4 + \sqrt{12}} = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = 1 + \sqrt{3} = 2 + (\sqrt{3} - 1)$

整數 $a = 2$, 小數 $b = \sqrt{3} - 1$

$$\frac{1}{a+b} - \frac{1}{b} = \frac{1}{1+\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{1}{1+\sqrt{3}} + \frac{1}{1-\sqrt{3}} = -1$$

() 10. 以 $2x-1$ 除 $4x^3 + 3x$ 之商式為 (A) $4x^2 + 2x + 4$ (B) $2x^2 + x + 2$ (C) $2x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{5}{4}$ (D) $2x^2 - x + 2$

【隨堂講義補充題.】

解答 B

解析 利用綜合除法：

$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & +0 & +3 & +0 \\ & & +2 & +1 & +2 \\ \hline 2 & 4 & +2 & +4 & 2 \\ & & 2 & +1 & +2 \end{array}$$

故商式為 $2x^2 + x + 2$, 餘式為 2

() 11. 設 $x = \frac{1}{\sqrt{5}+2}$, $y = \frac{1}{\sqrt{5}-2}$, 則 $x^2 + y^2 =$ (A)3 (B)9 (C)14 (D)18

【龍騰自命題.】

解答 D

解析 $x + y = \frac{1}{\sqrt{5}+2} + \frac{1}{\sqrt{5}-2} = \frac{(\sqrt{5}-2) + (\sqrt{5}+2)}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)} = 2\sqrt{5}$

$$x \times y = \frac{1}{\sqrt{5}+2} \times \frac{1}{\sqrt{5}-2} = 1$$

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = (2\sqrt{5})^2 - 2 \times 1 = 18$$

() 12. 已知 m, n 為實數, $Q(x)$ 為二次多項式。若 $x^4 - mx^3 - x^2 - 5x + n = (x^2 - 3x + 2)Q(x)$, 則 $2m + n =$ (A)-6 (B)-2 (C)4 (D)8

【102 年歷屆試題.】

解答 D

解析 令 $f(x) = x^4 - mx^3 - x^2 - 5x + n$

$$\because f(x) = (x^2 - 3x + 2)Q(x) = (x-1)(x-2)Q(x)$$

$\therefore x-1$ 與 $x-2$ 均為 $f(x)$ 的因式

$$\Rightarrow f(1) = 0, f(2) = 0$$

$$f(1) = 1 - m - 1 - 5 + n = 0 \Rightarrow -m + n = 5 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$f(2) = 16 - 8m - 4 - 10 + n = 0 \Rightarrow -8m + n = -2 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \quad 7m = 7 \Rightarrow m = 1$$

$$m = 1 \text{ 代入 } \textcircled{1} \quad -1 + n = 5 \Rightarrow n = 6$$

故 $2m+n=2\times 1+6=8$

- () 13. 設 α, β 為 $2x^2+5x+1=0$ 的兩根，且 $\alpha>\beta$ ，則 $\alpha-\beta=$ (A) $\frac{\sqrt{17}}{2}$ (B) $\frac{5}{2}$ (C) $\sqrt{17}$ (D) 5

【龍騰自命題.】

解答 A

解析 $2x^2+5x+1=0$ 的解為 $x=\frac{-5\pm\sqrt{25-8}}{2\times 2}=\frac{-5\pm\sqrt{17}}{4}$

$\therefore \alpha>\beta \quad \therefore \alpha=\frac{-5+\sqrt{17}}{4}, \beta=\frac{-5-\sqrt{17}}{4}$

$\Rightarrow \alpha-\beta=\frac{-5+\sqrt{17}}{4}-\frac{-5-\sqrt{17}}{4}=\frac{\sqrt{17}}{2}$

- () 14. 方程式 $x^3+3x^2-2=0$ 的所有實根之和為 (A) -1 (B) -2 (C) -3 (D) -4

【課本練習題-自我評量.】

解答 C

解析 利用綜合除法：

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & + & 3 & + & 0 & - & 2 & & -1 \\ & & - & 1 & - & 2 & + & 2 & \\ \hline 1 & + & 2 & - & 2 & & & & + 0 \end{array}$$

$\therefore x^3+3x^2-2=(x+1)(x^2+2x-2)$
 $= (x+1)[x-(-1+\sqrt{3})][x-(-1-\sqrt{3})]$

故實根之和為 $-1+(-1+\sqrt{3})+(-1-\sqrt{3})=-3$

- () 15. 設 $\sqrt{11-6\sqrt{2}}=T$ ，若 T 的整數部分為 a ，則 $a=$ (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) -1

【隨堂測驗.】

解答 B

解析 $T=\sqrt{11-2\sqrt{18}}=\sqrt{9-\sqrt{2}}=3-\sqrt{2}=(3-2)+(2-\sqrt{2})=1+(2-\sqrt{2})$

故整數部分 $a=1$ ，小數部分為 $2-\sqrt{2}$

- () 16. 設方程式 $\frac{x}{x+2}+\frac{2}{x-2}-\frac{x+6}{x^2-4}=0$ ，則 x 有幾組解？ (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

【課本練習題-自我評量.】

解答 B

解析 將等式左右同乘以 $(x+2)(x-2)$ 得

$x(x-2)+2(x+2)-(x+6)=0$
 $\Rightarrow x^2-2x+2x+4-x-6=0 \Rightarrow x^2-x-2=0 \Rightarrow (x-2)(x+1)=0$
 $\therefore x=2$ (不合) 或 -1

- () 17. 設分式 $\frac{10x+1}{(x+1)(2x-1)}=\frac{\alpha}{x+1}+\frac{\beta}{2x-1}$ ，則 $\alpha-\beta$ 之值為 (A) -1 (B) -2 (C) 1 (D) 2

【課本練習題-自我評量.】

解答 A

解析 將右式通分得 $\frac{10x+1}{(x+1)(2x-1)}=\frac{\alpha(2x-1)+\beta(x+1)}{(x+1)(2x-1)}$

得 $10x+1=\alpha(2x-1)+\beta(x+1)$

令 $x=-1$ 得 $-9=-3\alpha \Rightarrow \alpha=3$

令 $x=\frac{1}{2}$ 得 $6=\frac{3}{2}\beta \Rightarrow \beta=4$

故 $\alpha - \beta = 3 - 4 = -1$

- () 18. 已知 $f(x) = (2x^3 + 4x^2 + x + 1)(3x^2 - 5x + 2)$ ，則下列敘述何者有誤？ (A) $\deg f(x) = 5$ (B) $f(0) = 2$ (C) 展開式中， x^2 項係數為 6 (D) 展開式中，各項係數和為 8

【龍騰自命題】

解答 D

解析 $f(x) = (2x^3 + 4x^2 + x + 1)(3x^2 - 5x + 2)$

(A) $\deg f(x) = 3 + 2 = 5$

(B) $f(0) = 1 \times 2 = 2$

(C) x^2 項係數 $= 4 \times 2 + 1 \times (-5) + 1 \times 3 = 6$

(D) 各項係數和 $= f(1) = (2 + 4 + 1 + 1)(3 - 5 + 2) = 0$

- () 19. 化簡 $\frac{1}{x+2} + \frac{2x}{4-x^2} =$ (A) -1 (B) 1 (C) $\frac{1}{2+x}$ (D) $\frac{1}{2-x}$

【龍騰自命題】

解答 D

- () 20. 若 $a + a^{-1} = 3$ ，設 $m = a^2 + a^{-2}$ ， $n = a^3 + a^{-3}$ ，則 $m + n =$ (A) 30 (B) 25 (C) 24 (D) 21

【隨堂講義補充題】

解答 B

解析 $a + a^{-1} = a + \frac{1}{a} = 3$

$m = a^2 + a^{-2} = (a + a^{-1})^2 - 2 \times a \times a^{-1} = 3^2 - 2 \times a^0 = 7$

$n = a^3 + a^{-3} = (a + a^{-1})^3 - 3 \times a \times a^{-1} \times (a + a^{-1}) = 3^3 - 3 \times 1 \times 3 = 18$

則 $m + n = 7 + 18 = 25$

二、填充題 (5 題 每題 4 分 共 20 分)

1. $x^2 + ax - 6 = 0$ 有一根為 3，又 a 、 b 為 $2x^2 + 5x + c = 0$ 之兩根，則 $a + b + c =$ _____。

【龍騰自命題】

解答 $\frac{1}{2}$

解析 設另一根為 k

$$\begin{cases} 3 + k = -a \\ 3k = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = -2 \\ a = -1 \end{cases} \quad \text{又} \quad \begin{cases} a + b = -\frac{5}{2} \\ ab = \frac{c}{2} \end{cases} \quad \text{得} \quad b = -\frac{3}{2}, c = 3, \text{ 則}$$

$a + b + c = \frac{1}{2}$

2. 已知 $f(x)$ 除以 $(x-3)$ 的商式為 $x^2 + 2x - 5$ ，餘式為 7，則 $f(3) =$ _____。

【隨堂講義-綜合練習】

解答 7

解析 $f(x)$ 除以 $(x-3)$ 的餘式為 $f(3)$ ，故 $f(3) = 7$

3. 解方程式 $x^2 - 5x + 6 = 0$ ， $x =$ _____。

【龍騰自命題】

解答 2, 3

4. 若 $(x^2 + x - 6)$ 為 $f(x) = x^3 + ax^2 - 7x + b$ 的因式，則 $a + b =$ _____。

【隨堂講義-綜合練習】

解答 6

解析 $\because x^2+x-6=(x+3)(x-2)$ 且 x^2+x-6 為 $f(x)$ 的因式

$\therefore x+3$ 與 $x-2$ 均為 $f(x)$ 的因式

$\Rightarrow f(-3)=0, f(2)=0$

而 $f(-3)=(-3)^3+a(-3)^2-7(-3)+b=9a+b-6$

$f(2)=2^3+a(2)^2-7(2)+b=4a+b-6$

故 $9a+b-6=0, 4a+b-6=0$

$\Rightarrow a=0, b=6$

因此 $a+b=6$

5. 設 $f(x)$ 除以 $x-3, x+4$ 的餘式分別為 10 和 -4, 則 $f(x)$ 除以 x^2+x-12 的餘式為_____。

【龍騰自命題】

解答 $2x+4$

解析 設 x^2+x-12 除 $f(x)$ 的餘式為 $ax+b$

即 $f(x)=(x^2+x-12)q(x)+ax+b$

$\Rightarrow \begin{cases} f(3)=0 \times q(3)+3a+b=10 \\ f(-4)=0 \times q(-4)-4a+b=-4 \end{cases} \Rightarrow a=2, b=4, \text{ 故餘式為 } 2x+4$