1009 汽勤甲 夜輔　姓名　　座號

一、單選題 (20 題 每題 5 分 共 100 分)

(　　) 1.設 $0\le\theta\le\pi$，且 $2\sin^2\theta+11\cos\theta-7=0$，則 $\theta=$ (A)$\frac{\pi}{6}$ (B)$\frac{\pi}{3}$ (C)$\frac{2}{3}\pi$ (D)$\frac{3}{4}\pi$

【093 年歷屆試題.】

解答　B

解析　$2\sin^2\theta+11\cos\theta-7=0 \Rightarrow 2(1-\cos^2\theta)+11\cos\theta-7=0$

$\Rightarrow 2\cos^2\theta-11\cos\theta+5=0 \Rightarrow (2\cos\theta-1)(\cos\theta-5)=0$

$\Rightarrow \cos\theta=\frac{1}{2}$（$\because -1\le\cos\theta\le1$）

又 $0\le\theta\le\pi$　$\therefore \theta=\frac{\pi}{3}$

(　　) 2.若 $f(x)=4|x+1|+3|2x-1|$，則 $f(x)$的最小值為何？ (A)3 (B)4 (C)6 (D)9

【096 年歷屆試題.】

解答　C

解析　$f(x)=4|x+1|+3|2x-1|$

$\because f(-1)=4\times0+3\times3=9$，$f(\frac{1}{2})=4\times\frac{3}{2}+3\times0=6$

$\therefore f(x)$的最小值為 6

(　　) 3.設 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 為兩向量，$\vec{a}=(x,y)$，x、y 為實數，且 $|\vec{a}|=\sqrt{13}$，$\vec{b}=(3,-2)$，則 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 之內積的最大值為何? (A)$\sqrt{13}$ (B)$\sqrt{65}$ (C)13 (D)65

【091 年歷屆試題.】

解答　C

解析　由題目中，$|\vec{a}|=\sqrt{13}$，$\vec{b}=(3,-2)$

$\Rightarrow |\vec{b}|=\sqrt{3^2+(-2)^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$

所求 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 的內積：

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\times|\vec{b}|\times\cos\theta=\sqrt{13}\times\sqrt{13}\times\cos\theta=13\cos\theta$

$\because -1\le\cos\theta\le1$（最大）

故當 $\cos\theta=1$ 代入 $13\cos\theta$ 得 13，是為最大內積

(　　) 4.已知直線 L 過點(1,5)，且垂直於直線 $2x-3y+6=0$，則 L 與 x 軸的交點坐標為何？ (A)$(\frac{-13}{2},0)$ (B)$(\frac{-7}{3},0)$ (C)$(\frac{13}{3},0)$ (D)$(\frac{17}{2},0)$

【091 年歷屆試題.】

解答　C

解析　由題目中，$L\perp 2x-3y+6=0$

故可設 $L:3x+2y+k=0$

L 過點(1,5)代入：

$3\times1+2\times5+k=0 \Rightarrow 13+k=0 \Rightarrow k=-13$

得 $L:3x+2y-13=0$

L 與 x 軸之交點令為$(x,0)$

$y=0$ 代入 $L:3x+0-13=0 \Rightarrow x=\frac{13}{3}$

(　　) 5.試問 sin310°與下列哪一個三角函數值相等？ (A)cos40° (B)sin50° (C)sin130° (D)cos220°

【092 年歷屆試題.】

解答　D

解析　$\sin310°=\sin(360°-50°)=-\sin50°$

$\cos40°=\cos(90°-50°)=\sin50°$

$\sin130°=\sin(180°-50°)=\sin50°$

$\cos220°=\cos(270°-50°)=-\sin50°$

$\therefore \sin310°=\cos220°$

(　　) 6.已知 $A(1,-1)$與 $B(-2,3)$為平面上的兩點，設長度為 3 的向量 $\vec{v}=(a,b)$ 與向量 $\overrightarrow{AB}$ 同方向，則 $2a+b=$ (A)-3 (B)$-\frac{6}{5}$ (C)$\frac{6}{5}$ (D)3

【093 年歷屆試題.】

解答　B

解析　$\overrightarrow{AB}=(-2-1,3-(-1))=(-3,4)$

又$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5 \Rightarrow \overrightarrow{AB}$之單位向量

$\overrightarrow{AB}_u=(-\frac{3}{5},\frac{4}{5})$

$\because \vec{v}=(a,b)$ 與 $\overrightarrow{AB}$ 同方向且長度為 3

$\Rightarrow \vec{v}=3\overrightarrow{AB}_u=3(-\frac{3}{5},\frac{4}{5})=(-\frac{9}{5},\frac{12}{5})$

即 $a=-\frac{9}{5}$，$b=\frac{12}{5}$

$\therefore 2a+b=2(-\frac{9}{5})+\frac{12}{5}=-\frac{6}{5}$

(　　) 7.設 $A(-4,4)$與 $B(1,-1)$為坐標平面上之兩點，若點 C 在 $\overline{AB}$ 上且 $2\overline{AC}=3\overline{BC}$，則點 C 的坐標為何？ (A)$(-3,3)$ (B)$(-2,2)$ (C)$(-1,1)$ (D)(0,0)

【094 年歷屆試題.】

解答 C

解析 ∵ C 在 $\overline{AB}$ 上且 $2\overline{AC}=3\overline{BC}$ ⇒ $\overline{AC}:\overline{BC}=3:2$

設點 C 坐標為(x,y)

則 $x=\frac{2(-4)+3\times1}{3+2}=-1$，$y=\frac{2\times4+3(-1)}{3+2}=1$

∴ 點 C 的坐標為$(-1,1)$

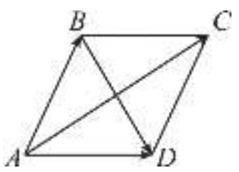
(　　) 8.在坐標平面上的平行四邊形 $ABCD$（按順序）中，若 $\overrightarrow{AB}=(4,8)$、$\overrightarrow{AD}=(1,4)$，則 $|\overrightarrow{AC}|+|\overrightarrow{BD}|=$

(A)$4\sqrt{5}+\sqrt{17}$　(B)18　(C)$8\sqrt{5}+2\sqrt{17}$　(D)36

【099 年歷屆試題.】

解答 B

解析



$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=(4,8)+(1,4)=(5,12)$

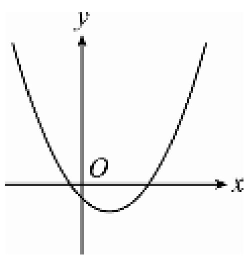
$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AD}+(-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=(1,4)-(4,8)=(-3,-4)$

而 $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{5^2+12^2}=13$，$|\overrightarrow{BD}|=\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}=5$

故 $|\overrightarrow{AC}|+|\overrightarrow{BD}|=13+5=18$

故選(B)

(　　) 9.設 a、b、c 為實數，且二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的圖形如圖所示，則點 $P\,(b^2-4ac\,,\,abc)$在第幾象限？



(A)第一象限　(B)第二象限　(C)第三象限　(D)第四象限

【100 年歷屆試題.】

解答 A

解析 對於 $y=ax^2+bx+c$ 的圖形

開口向上 ⇒ $a>0$

頂點在 y 軸右側 ⇒ a、b 異號 ⇒ $b<0$

與 y 軸的交點$(0\,,c)$在 y 軸的負向 ⇒ $c<0$

與 x 軸有 2 個交點 ⇒ $b^2-4ac>0$

因此 $abc>0$，故 $P\,(b^2-4ac\,,\,abc)$在第一象限

(　　) 10.平面上兩點 $A(5,-1)$、$B(3,4)$。若 C 點在 y 軸上，且滿足 $\overline{AC}=\overline{BC}$，則 C 點坐標為何？　(A)$(0,-\frac{1}{10})$　(B)$(0,-\frac{1}{15})$　(C)$(0,\frac{1}{15})$　(D)$(0,\frac{1}{10})$

【098 年歷屆試題.】

解答 A

解析 C 點在 y 軸上，設 $C(0,t)$

∵ $\overline{AC}=\overline{BC}$　∴

$\sqrt{(5-0)^2+(-1-t)^2}=\sqrt{(3-0)^2+(4-t)^2}$

⇒ $(5-0)^2+(-1-t)^2=(3-0)^2+(4-t)^2$ ⇒

$t=-\frac{1}{10}$

故 $C(0,-\frac{1}{10})$

(　　) 11.設 $A(2,5)$、$B(4,3)$、$C(5,1)$為坐標平面上之三點，若 $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 上的正射影為 $\overrightarrow{AD}$，則 $|\overrightarrow{AD}|:|\overrightarrow{AC}|=$　(A)7:5　(B)14:5　(C)7:25　(D)14:25

【095 年歷屆試題.】

解答 D

解析 ∵ $A(2,5)$、$B(4,3)$、$C(5,1)$ ⇒ $\overrightarrow{AB}=(2,-2)$，

$\overrightarrow{AC}=(3,-4)$

$\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 上的正射影為 $\overrightarrow{AD}=\left(\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|^2}\right)\overrightarrow{AC}$

∴

$|\overrightarrow{AD}|:|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}|:|\overrightarrow{AC}|^2=|2\cdot3+(-2)(-4)|:(3^2+(-4)^2)=$

(　　) 12.在坐標平面上，點 A、B、C 的坐標分別為$(-1,k)$、$(1,2)$、$(1,1)$，若向量 $\overrightarrow{AC}$ 與 $\overrightarrow{BC}$ 的內積為 0，則 $k=$　(A)-1　(B)0　(C)$\frac{1}{2}$　(D)1

【096 年歷屆試題.】

解答 D

解析 ∵ $A(-1,k)$、$B(1,2)$、$C(1,1)$ ⇒ $\overrightarrow{AC}=(2,1-k)$，

$\overrightarrow{BC}=(0,-1)$

又 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ ⇒ $2\times0+(1-k)\times(-1)=0$

∴ $k=1$

(　　) 13.設 $\vec{a}=(4,3)$，$\vec{b}=(x,y)$ 為平面上兩向量，且 x^2+y^2

$=40$，則此二向量內積 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ 的最大值為何？

(A)$10\sqrt{10}$　(B)$12\sqrt{10}$　(C)$14\sqrt{10}$　(D)$16\sqrt{10}$

【098 年歷屆試題.】

解答 A

解析 $\overrightarrow{a}=(4,3)\ \Rightarrow\ |\overrightarrow{a}|=\sqrt{4^2+3^2}=5$

$\overrightarrow{b}=(x,y)\ \Rightarrow\ |\overrightarrow{b}|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

設 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的夾角為 θ

則

$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta=5\times2\sqrt{10}\times\cos\theta=10\sqrt{10}\cos\theta\le10\sqrt{10}$

（$\because\ -1\le\cos\theta\le1$）

故 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ 的最大值為$10\sqrt{10}$

《另解》

$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=(4,3)\cdot(x,y)=4x+3y$

由柯西不等式：

$(4^2+3^2)(x^2+y^2)\ge(4x+3y)^2\ \Rightarrow\ 25\times40\ge(4x+3y)^2$

$\Rightarrow\ (4x+3y)^2-1000\le0$

$\Rightarrow\ [(4x+3y)+10\sqrt{10}][(4x+3y)-10\sqrt{10}]\le0$

$\Rightarrow\ -10\sqrt{10}\le4x+3y\le10\sqrt{10}$

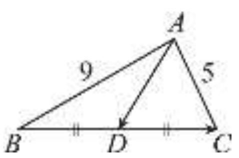
故 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ 的最大值為$10\sqrt{10}$

(　　) 14.在△ABC 中，若 D 為線段 $\overline{BC}$ 的中點，且 $\overline{AB}=9$、$\overline{AC}=5$，則向量內積 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=$　(A)-28　(B)-14　(C)14　(D)28

【099 年歷屆試題.】

解答 A

解析



$\because\ D$ 為 $\overline{BC}$ 的中點

$\therefore\ \overline{BD}:\overline{DC}=1:1\ \Rightarrow\ \overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC})\cdot(-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=-\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC}\right|^2$

$=-\frac{1}{2}\times9^2+\frac{1}{2}\times5^2=-28$

故選(A)

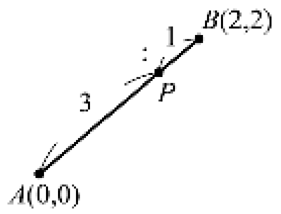
(　　) 15.設 $A(0,0)$、$B(2,2)$ 為平面上二點，若點 $P(m,n)$ 在線段 $\overline{AB}$ 上，且 $\overline{AP}:\overline{PB}=3:1$，則 $m+n$ 之值為何？

(A)2　(B)2.5　(C)3　(D)3.5

【103 年歷屆試題.】

解答 C

解析



$\because$ 點 $P(m,n)$ 在 $\overline{AB}$ 上且 $\overline{AP}:\overline{PB}=3:1$

$\therefore\ P=\frac{3B+1A}{3+1}=\frac{3(2,2)+(0,0)}{4}=\frac{(6,6)}{4}=\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$

故 $m=\frac{3}{2}$，$n=\frac{3}{2}$，則 $m+n=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=3$

(　　) 16.若 $\tan\theta\csc\theta=-1+6\cos\theta$，其中 θ 為第三象限角，則 $\tan\theta=$　(A)$2\sqrt{2}$　(B)$\sqrt{3}$　(C)$-\sqrt{3}$　(D)$-2\sqrt{2}$

【106 年歷屆試題.】

解答 A

解析 $\tan\theta\csc\theta=-1+6\cos\theta\ \Rightarrow$

$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\times\frac{1}{\sin\theta}=-1+6\cos\theta$

$\Rightarrow\ \frac{1}{\cos\theta}=-1+6\cos\theta\ \overset{\times\cos\theta}{\Rightarrow}\ 1=-\cos\theta+6\cos^2\theta$

$\Rightarrow\ 6\cos^2\theta-\cos\theta-1=0\ \Rightarrow$

$(3\cos\theta+1)(2\cos\theta-1)=0$

$\Rightarrow\ \cos\theta=-\frac{1}{3}$ 或 $\frac{1}{2}$

$\because\ \theta$ 為第三象限角

$\therefore\ \cos\theta<0$

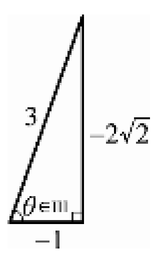
故 $\cos\theta=-\frac{1}{3}$

用 $\cos\theta=-\frac{1}{3}$ 來作直角三角形

取斜邊$=3$，鄰邊$=-1$

則對邊$=-\sqrt{3^2-(-1)^2}=-2\sqrt{2}$

因此 $\tan\theta=\frac{-2\sqrt{2}}{-1}=2\sqrt{2}$



(　　) 17.下列方程式所對應的圖形中，何者恆在 x 軸的上方？

(A) $y=5x^2-3x+1$　(B) $y=3x^2+5x-1$

(C) $y=x^2-5x+3$　(D) $y=3x^2+x-5$

【104 年歷屆試題.】

解答　A

解析　$\because$ 四個選項的 x^2 項係數均為正數

$\therefore$ 皆為開口向上的拋物線

(A) $(-3)^2-4\times5\times1=-11<0$ →符合

(B) $5^2-4\times3\times(-1)=37>0$

(C) $(-5)^2-4\times1\times3=13>0$

(D) $1^2-4\times3\times(-5)=61>0$

(　　) 18.已知平面三向量 $\overrightarrow{a}=(3,4)$，$\overrightarrow{b}=(x,-9)$，

$\overrightarrow{c}=(-8,y)$。設 $\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}$ 且 $\overrightarrow{b}\,//\,\overrightarrow{c}$，則 $y-x$ 之值為

何？　(A) -18　(B) -6　(C) 6　(D) 18

【103 年歷屆試題.】

解答　B

解析　$\because\ \overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}$　　$\therefore\ \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=0$

$\Rightarrow\ (3,4)\cdot(x,-9)=0\ \Rightarrow\ 3x+4(-9)=0\ \Rightarrow$

$3x-36=0\ \Rightarrow\ x=12$

則 $\overrightarrow{b}=(x,-9)=(12,-9)$

$\because\ \overrightarrow{b}\,//\,\overrightarrow{c}$ 且 $\overrightarrow{c}=(-8,y)$　　$\therefore\ \dfrac{12}{-8}=\dfrac{-9}{y}$

$\Rightarrow\ 12y=72\ \Rightarrow\ y=6$

故 $y-x=6-12=-6$

(　　) 19.設平面二向量 $\overrightarrow{u}=(2\cos\theta,\sin\theta)$，$\overrightarrow{v}=(\sin\theta,2\cos\theta)$

且其內積 $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=1$，若 $0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$，則 θ 之值可能為

何？　(A) $\dfrac{\pi}{12}$　(B) $\dfrac{\pi}{6}$　(C) $\dfrac{\pi}{4}$　(D) $\dfrac{\pi}{3}$

【103 年歷屆試題.】

解答　A

解析

$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=(2\cos\theta,\sin\theta)\cdot(\sin\theta,2\cos\theta)$

$=2\cos\theta\sin\theta+\sin\theta\times2\cos\theta$

$=2\times\ 2\sin\theta\cos\theta=2\ \sin2\theta$

$\because\ \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=1$　　$\therefore\ 2\sin2\theta=1\ \Rightarrow\ \sin2\theta=\dfrac{1}{2}$

又 $0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\ \overset{\times2}{\Rightarrow}\ 0\le2\theta\le\pi$

而 $\sin\dfrac{\pi}{6}=\sin\dfrac{5}{6}\pi=\dfrac{1}{2}$

則 $2\theta=\dfrac{\pi}{6}$ 或 $\dfrac{5}{6}\pi\ \Rightarrow\ \theta=\dfrac{\pi}{12}$ 或 $\dfrac{5}{12}\pi$

故選(A)

(　　) 20.已知向量 $\overrightarrow{a}=(-6,8)$ 且與 $\overrightarrow{b}$ 之夾角為 60°，則向量

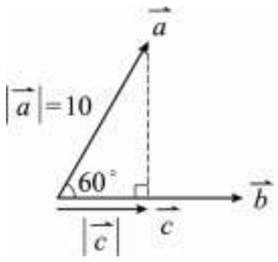
$\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{b}$ 上的正射影長為何？　(A) 5　(B) 7

(C) $5\sqrt{3}$　(D) 10

【105 年歷屆試題.】

解答　A

解析　如圖，$\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{b}$ 上的正射影為 $\overrightarrow{c}$



而 $\left|\overrightarrow{a}\right|=\sqrt{(-6)^2+8^2}=10$，則正射影長

$\left|\overrightarrow{c}\right|=\left|\overrightarrow{a}\right|\times\left|\cos60^\circ\right|=10\times\dfrac{1}{2}=5$

〈另解〉

$\left|\overrightarrow{a}\right|=\sqrt{(-6)^2+8^2}=10$

$\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{b}$ 上的正射影長為

$\dfrac{\left|\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\right|}{\left|\overrightarrow{b}\right|}=\dfrac{\left|\left|\overrightarrow{a}\right|\times\left|\overrightarrow{b}\right|\times\cos60^\circ\right|}{\left|\overrightarrow{b}\right|}=\dfrac{\left|\overrightarrow{a}\right|\times\left|\overrightarrow{b}\right|\times\left|\cos60^\circ\right|}{\left|\overrightarrow{b}\right|}$

$=\left|\overrightarrow{a}\right|\times\left|\cos60^\circ\right|$

$=10\times\dfrac{1}{2}=5$