1007 汽勤甲平時測驗 數學第一冊　姓名　　　座號

一、單選題 (25 題 每題 4 分 共 100 分)

(　　) 1.設 $A(2,5)$、$B(4,3)$、$C(5,1)$為坐標平面上之三點，若 $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 上的　正射影為 $\overrightarrow{AD}$，則$|\overrightarrow{AD}|:|\overrightarrow{AC}|=$　(A)7:5　(B)14:5　(C)7:25　(D)14:25

【095 年歷屆試題.】

解答　D

解析　$\because$　$A(2,5)$、$B(4,3)$、$C(5,1)$　$\Rightarrow$　$\overrightarrow{AB}=(2,-2)$，$\overrightarrow{AC}=(3,-4)$

$\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 上的正射影為 $\overrightarrow{AD}=(\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|^2})\overrightarrow{AC}$

$\therefore$

$|\overrightarrow{AD}|:|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}|:|\overrightarrow{AC}|^2=|2\cdot3+(-2)(-4)|:(3^2+(-4)^2)=14:25$

(　　) 2.設 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 為平面上之三個向量且

$\vec{a}=(\cos30°,\sin30°)$，$\vec{b}=(\cos150°,\sin150°)$，

$\vec{c}=(\cos270°,\sin270°)$，試求 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=$　(A)(1,0)　(B)(0,1)　(C)(1,1)　(D)(0,0)

【095 年歷屆試題.】

解答　D

解析　$\vec{a}=(\cos30°,\sin30°)=(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2})$

$\vec{b}=(\cos150°,\sin150°)=(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2})$

$\vec{c}=(\cos270°,\sin270°)=(0,-1)$

$\therefore\ \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+0,\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-1)=(0,0)$

(　　) 3.若 $\cos\theta=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ 且 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，試求 $2\sin\dfrac{\theta}{4}\cos\dfrac{\theta}{4}\cos\dfrac{\theta}{2}=$

(A)$\dfrac{1}{12}$　(B)$\dfrac{1}{6}$　(C)$\dfrac{1}{4}$　(D)$\dfrac{2}{3}$

【隨堂講義補充題.】

解答　B

解析　$\cos\theta=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ $(0<\theta<\dfrac{\pi}{2})$　$\therefore$　$\sin\theta=\dfrac{1}{3}$

所求$=\left(2\sin\dfrac{\theta}{4}\cos\dfrac{\theta}{4}\right)\cos\dfrac{\theta}{2}=\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}$

$=\dfrac{1}{2}\left(2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\sin\theta=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$

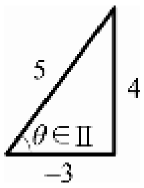
(　　) 4.已知 $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$，$\cos\theta=-\dfrac{3}{5}$，則下列大小關係何者正確？

(A)$\cos\theta<\sin2\theta<\cos2\theta<\sin\theta$　(B)$\sin2\theta<\cos2\theta<\cos\theta<\sin\theta$　(C)$\sin2\theta<\cos\theta<\cos2\theta<\sin\theta$　(D)$\cos\theta<\cos2\theta<\sin2\theta<\sin\theta$

【101 年歷屆試題.】

解答　C

解析　$\because$　$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ 且 $\cos\theta=-\dfrac{3}{5}$　$\therefore$　$\sin\theta=\dfrac{4}{5}$



$\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\times\dfrac{4}{5}\times(-\dfrac{3}{5})=-\dfrac{24}{25}$

$\cos2\theta=2\cos^2\theta-1=2\times(-\dfrac{3}{5})^2-1=-\dfrac{7}{25}$

$\because$　$-\dfrac{24}{25}<-\dfrac{3}{5}<-\dfrac{7}{25}<\dfrac{4}{5}$　$\therefore$　$\sin2\theta<\cos\theta<\cos2\theta<\sin\theta$

(　　) 5.下列有關點 $P(-3,4)$的敘述何者正確？　(A)P 點在第四象限　(B)P 點和原點的距離為 1　(C)P 點和 x 軸距離為 4　(D)P 點和 y 軸距離為 4

【龍騰自命題.】

解答　C

(　　) 6.設一圓之圓心(3,－1)，點 $P(-2,4)$在圓周上，則此圓之直徑長為　(A)10　(B)$5\sqrt{2}$　(C)50　(D)$10\sqrt{2}$

【龍騰自命題.】

解答　D

解析　$O(3,-1)$，$P(-2,4)$　$\therefore$

$\overline{OP}=\sqrt{(-2-3)^2+(4+1)^2}=\sqrt{25+25}=5\sqrt{2}$

$\therefore$　直徑 $=2\times\overline{OP}=2\times5\sqrt{2}=10\sqrt{2}$

(　　) 7.設一正六邊形 $ABCDEF$ 的一邊長為 2，則 $\dfrac{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}$ 之值為　(A)1　(B)2　(C)$2\sqrt{2}$　(D)$\sqrt{2}$

【龍騰自命題.】

解答　B

解析　$\because$　$ABCDEF$ 為正六邊形

$\therefore$　$\angle ADC=60°$，且 $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{CD}$

$\therefore$　$\angle CAD=30°$，則 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{AC}|\cos\angle CAD=4\times2\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=12$

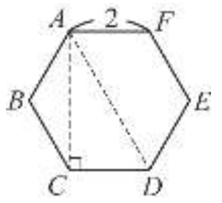
（依據△的 $30°-60°-90°$邊比知）

又 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cos\angle CAB$

（$\angle CAB=\angle BAD-\angle CAD=60°-30°=30°$）

$\therefore$　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times2\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=6$

$\therefore\ \dfrac{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}=\dfrac{12}{6}=2$



(　　　)8.設 $A(-2,5)$、$B(4,-3)$，若 $\vec{a}$ 與 $\overrightarrow{AB}$ 反方向且 $|\vec{a}|=1$，則 $\vec{a}=$

(A)$(-\frac{4}{5},\frac{3}{5})$　(B)$(\frac{4}{5},-\frac{3}{5})$　(C)$(\frac{3}{5},-\frac{4}{5})$　(D)$(-\frac{3}{5},\frac{4}{5})$

【課本練習題-自我評量.】

解答　D

解析　$\overrightarrow{AB}=(4-(-2),-3-5)=(6,-8)$

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{6^2+(-8)^2}=10$

$\vec{a}=\dfrac{-\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\dfrac{-(6,-8)}{10}=(-\frac{3}{5},\frac{4}{5})$

(　　　)9.△ABC 中，$\overline{AB}=4$，$\overline{BC}=5$，$\angle B$ 的餘弦 $\cos B=-\frac{5}{13}$，則三角形面積 S 為　(A)$S\le 10$　(B)$9\le S<10$　(C)$8\le S<9$　(D)$S<8$

【龍騰自命題.】

解答　B

解析　已知 $\cos B=-\frac{5}{13}$，則 $\sin B=\frac{12}{13}$，又

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{BC}\times\sin B=\frac{120}{13}=9\frac{3}{13}$

$\therefore\ 9\le S<10$

(　　　)10.設△ABC 三頂點坐標分別為 $A(3,-1)$、$B(6,-5)$、$C(4,6)$，試求 $\angle A=$　(A)$30°$　(B)$45°$　(C)$135°$　(D)$150°$

【隨堂講義補充題.】

解答　C

解析　$\overrightarrow{AB}=(3,-4)\ \Rightarrow\ \left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$

$\overrightarrow{AC}=(1,7)\ \Rightarrow\ \left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{1^2+7^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

$\therefore\ \cos A=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\times\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\dfrac{(3,-4)\cdot(1,7)}{5\times5\sqrt{2}}=\dfrac{-25}{25\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow\ \angle A=135°$

(　　　)11.設 $A(1,1)$、$B(3,4)$、$C(-1,-2)$、$D(0,-1)$，則 $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{CD}$ 上的正射影為　(A)$(\frac{5}{2},\frac{5}{2})$　(B)$(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$　(C)$(-\frac{5}{2},-\frac{5}{2})$　(D)$(\frac{5}{\sqrt{2}},\frac{5}{\sqrt{2}})$

【課本練習題-自我評量.】

解答　A

解析　$\overrightarrow{AB}=(3-1,4-1)=(2,3)$

$\overrightarrow{CD}=(0-(-1),-1-(-2))=(1,1)$

$\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{CD}$ 上的正射影為

$(\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{CD}|^2})\overrightarrow{CD}=(\dfrac{2\times1+3\times1}{(\sqrt{1^2+1^2})^2})(1,1)$

$=\frac{5}{2}(1,1)=(\frac{5}{2},\frac{5}{2})$

(　　　)12.設二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c$ 圖形中，頂點坐標為 $(1,-2)$，且 $f(0)=1$，則 $2a+b+c=$　(A)1　(B)2　(C)3　(D)4

【隨堂講義補充題.】

解答　A

解析　已知二次函數頂點坐標 $(1,-2)$

故可設此二次函數為 $f(x)=a(x-1)^2-2$

$\because\ f(0)=1$ 即 $a(0-1)^2-2=1$　得 $a=3$

$f(x)=3(x-1)^2-2=3(x^2-2x+1)-2=3x^2-6x+1=ax^2+bx+c$

得 $a=3$，$b=-6$，$c=1$

故 $2a+b+c=6+(-6)+1=1$

(　　　)13.直線 $y=mx+5$ 與 $2|x|+3|y|=6$ 圖形恰有一個交點，則 $|m|=$

(A)$\frac{5}{2}$　(B)$\frac{5}{3}$　(C)$\frac{5}{6}$　(D)$\frac{6}{5}$

【龍騰自命題.】

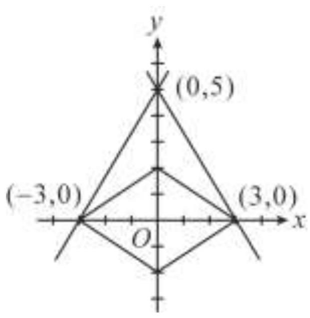
解答　B

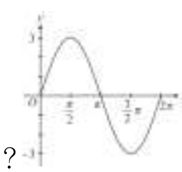
解析　$2|x|+3|y|=6$ 是以 $(3,0)$、$(-3,0)$、$(0,2)$、$(0,-2)$ 為頂點之菱形

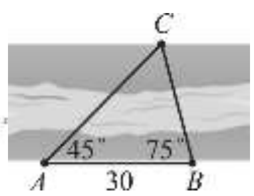
$y=mx+5$ 必經過點 $(0,5)$

又 $y=mx+5$ 與 $2|x|+3|y|=6$ 恰有一個交點，交點必為 $(3,0)$ 或 $(-3,0)$

因此斜率 $m=\frac{5}{3}$ 或 $-\frac{5}{3}$　$\therefore\ |m|=\frac{5}{3}$







(　　　)14.下圖為何者之部分圖形？

(A)$y=\sin x$　(B)$y=\sin 3x$　(C)$y=3\sin x$　(D)$y=3\cos x$

【龍騰自命題.】

解答 C

解析 圖形是週期為 2π 的 sinx 圖形，值域為-3 與 3 之間

故函數為 $y=3\sin x$

( ) 15.如右上圖，河的一邊有 A、B 兩點，且 $\overline{AB}=30$ 公尺，河的另一邊有一點 C，測得 $\angle BAC=45°$，$\angle ABC=75°$，則 $\overline{BC}=$

(A)$15\sqrt{2}+5\sqrt{6}$ 公尺 (B)$10\sqrt{2}$ 公尺 (C)$10\sqrt{6}$ 公尺 (D)$10\sqrt{3}$ 公尺

【課本練習題-自我評量.】

解答 C

解析 $\angle C=180°-45°-75°=60°$

由正弦定理：

$$\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A} \Rightarrow \frac{30}{\sin 60°}=\frac{a}{\sin 45°}$$

$$\Rightarrow \frac{30}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{a}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow a=10\sqrt{6}$$

$\therefore$ $\overline{BC}=a=10\sqrt{6}$（公尺）

( ) 16.試求 $A(-2,3)$ 到直線 $L:y=\frac{1}{2}x+1$ 的距離為 (A)$\frac{6}{\sqrt{5}}$

(B)$\frac{4}{\sqrt{5}}$ (C)$\frac{3}{\sqrt{5}}$ (D)$\frac{1}{\sqrt{5}}$

【隨堂講義補充題.】

解答 A

解析 $L:y=\frac{1}{2}x+1$ 整理得 $x-2y+2=0$

則 $d(A,L)=\frac{|-2-2\times3+2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{6}{\sqrt{5}}$

( ) 17. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}$，$|\overrightarrow{OA}|=1$，$|\overrightarrow{OB}|=2$，$|\overrightarrow{OC}|=\sqrt{3}$，$\theta$ 為向量 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 之夾角，則 $\sin\theta=$ (A)$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B)$\frac{1}{2}$ (C)$-\frac{3}{2}$

(D)$-\frac{1}{2}$

【龍騰自命題.】

解答 A

解析 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OC}$ $(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})^2=(-\overrightarrow{OC})^2$

$\Rightarrow$ $|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|-\overrightarrow{OC}|^2$

$\therefore$ $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-1$ $\cos\theta=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}=-\frac{1}{2}$

$\therefore$ $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$

( ) 18.設 $0<2\theta<\frac{\pi}{2}$，若 $\sin 2\theta=\frac{4}{5}$，則 $\sin^4\theta-\cos^4\theta$ 的值為 (A)$-\frac{1}{5}$

(B)-1 (C)$-\frac{4}{5}$ (D)$-\frac{3}{5}$

【龍騰自命題.】

解答 D

解析 因為 $0<2\theta<\frac{\pi}{2}$ 且 $\sin 2\theta=\frac{4}{5}$，所以 $\cos 2\theta=\frac{3}{5}$

$\sin^4\theta-\cos^4\theta=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)(\sin^2\theta-\cos^2\theta)=\sin^2\theta-\cos^2\theta=-\cos 2\theta=-\frac{3}{5}$

( ) 19.設 $0<x<\frac{\pi}{2}$，若方程式 $\tan(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{2})+\cot(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{2})=2\sqrt{2}$，則

x 的值為 (A)$\frac{5\pi}{12}$ (B)$\frac{\pi}{6}$ (C)$\frac{\pi}{3}$ (D)$\frac{\pi}{4}$

【龍騰自命題.】

解答 A

解析

$$\tan(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{2})+\cot(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{2})=\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{2})\cos(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{2})}$$

$$=\frac{2}{\sin(\frac{2}{3}\pi-x)}=2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \sin(\frac{2}{3}\pi-x)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\because\ 0<x<\frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{2}<-x<0$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{6}<\frac{2}{3}\pi-x<\frac{2}{3}\pi \qquad \therefore\ \frac{2}{3}\pi-x=\frac{\pi}{4}$$

$$x=\frac{2}{3}\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{5}{12}\pi$$

( ) 20.若兩直線 $L_1:6x+ay+2=0$，$L_2:(a-1)x+2y+1=0$，若 $L_1 // L_2$，則 a 之值為何？ (A)-3 (B)4 (C)4 或 -3 (D)-4 或 3

【隨堂講義補充題.】

解答 A

解析 $L_1:6x+ay+2=0$

$L_2:(a-1)x+2y+1=0$

$\because$ $L_1 // L_2$ $\Rightarrow$ $\frac{6}{a-1}=\frac{a}{2}\neq\frac{2}{1}$

由 $\frac{6}{a-1}=\frac{a}{2}$，解得 $a=4$ 或 -3

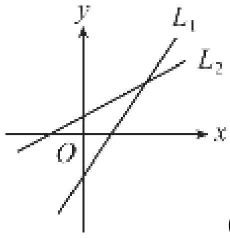
①當 $a=4$ 時，$\frac{6}{3}=\frac{4}{2}=\frac{2}{1}$（相依，重合，無限多解）

②當 $a=-3$ 時，$\frac{6}{-4}=\frac{-3}{2}\neq\frac{2}{1}$（矛盾，平行，無解）

故 $a=-3$

( ) 21.如圖，兩直線 L_1、L_2 之方程式分別為 $L_1:x+ay+b=0$、$L_2:x+cy$

$+d=0$；試問下列哪個選項是正確的？



(A)$a>0$　(B)$b>0$　(C)$c>0$　(D)$d>0$

【龍騰自命題.】

解答　D

解析　直線 L_1 與 x、y 軸的交點為$(-b,0)$、$(0,-\frac{b}{a})$

直線 L_2 與 x、y 軸的交點為$(-d,0)$、$(0,-\frac{d}{c})$

由圖可知：$-b>0$、$-\frac{b}{a}<0$；$-d<0$、$-\frac{d}{c}>0$

因此 $a<0$、$b<0$、$c<0$、$d>0$

(　　)22.△ABC 中，三邊長為 4、5、6，若最大內角為 θ，則△ABC 面積 ＝ (A)$\frac{9\sqrt{7}}{4}$　(B)$\frac{11\sqrt{7}}{4}$　(C)$\frac{13\sqrt{7}}{4}$　(D)$\frac{15\sqrt{7}}{4}$

【龍騰自命題.】

解答　D

(　　)23.過(2,7)，(5,4)兩點的直線，其斜角為　(A)$\frac{\pi}{6}$　(B)$\frac{\pi}{4}$　(C)$\frac{\pi}{2}$　(D)$\frac{3}{4}\pi$

【龍騰自命題.】

解答　D

(　　)24.試求 $\cos(15°+\theta)\cos(30°-\theta)-\sin(30°-\theta)\sin(15°+\theta)=$ (A)$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$　(B)$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$　(C)$\frac{\sqrt{3}}{2}$　(D)$\frac{\sqrt{2}}{2}$

【課本練習題-自我評量.】

解答　D

解析　原式$=\cos[(15°+\theta)+(30°-\theta)]=\cos 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$

(　　)25.已知三角形的三邊長分別為 3 公分、3 公分、4 公分，則此三角形之外接圓半徑為何？　(A)$\frac{2\sqrt{5}}{5}$　(B)$\frac{3\sqrt{5}}{5}$　(C)$\frac{7\sqrt{5}}{10}$　(D)$\frac{9\sqrt{5}}{10}$

【104 年歷屆試題.】

解答　D

解析　設外接圓的半徑為 R，

$s=\frac{1}{2}(3+3+4)=5$

△ABC 的面積$=\sqrt{5(5-3)(5-3)(5-4)}=2\sqrt{5}$

又△ABC 的面積$=\frac{3\times3\times4}{4R}=\frac{9}{R}$

則 $\frac{9}{R}=2\sqrt{5}$ $\Rightarrow$ $R=\frac{9}{2\sqrt{5}}=\frac{9\sqrt{5}}{10}$