0925 向量 班級　　　　姓名　　　　　座號

一、單選題 (25 題 每題 4 分 共 100 分)

(　　　) 1.設 $L：6x+8y-3=0$ 為平面上一直線，則下列方程式中何者與 L 平行，且與 L 之距離為 $\frac{5}{2}$？ (A)$3x+4y-28=0$　(B)$3x+4y+11=0$　(C)$6x+8y-19=0$　(D)$6x+8y+19=0$

【092 年歷屆試題.】

解答　B

解析　設 L_1 平行 $L：6x+8y-3=0$ 且與 L 之距離為 $\frac{5}{2}$

則 L_1 可設為 $6x+8y+k=0$　$\Rightarrow$　$\frac{|k-(-3)|}{\sqrt{6^2+8^2}}=\frac{5}{2}$　$\Rightarrow$　$|k+3|=25$

$\Rightarrow$　$k+3=\pm 25$　$\Rightarrow$　$k=22$ 或 -28

$\Rightarrow$　L_1 可為 $6x+8y+22=0$ 或 $6x+8y-28=0$

$\Rightarrow$　化簡得 $L_1：3x+4y+11=0$ 或 $3x+4y-14=0$

(　　　) 2.設 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 為兩向量，$\overrightarrow{a}=(x,y)$，x、y 為實數，且 $|\overrightarrow{a}|=\sqrt{13}$，$\overrightarrow{b}=(3,-2)$，則 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 之內積的最大值為何? (A)$\sqrt{13}$　(B)$\sqrt{65}$　(C)13　(D)65

【091 年歷屆試題.】

解答　C

解析　由題目中，$|\overrightarrow{a}|=\sqrt{13}$，$\overrightarrow{b}=(3,-2)$

$\Rightarrow$　$|\overrightarrow{b}|=\sqrt{3^2+(-2)^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$

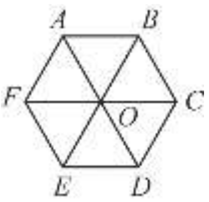
所求 $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$ 的內積：

$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=|\overrightarrow{a}|\times|\overrightarrow{b}|\times\cos\theta=\sqrt{13}\times\sqrt{13}\times\cos\theta=13\cos\theta$

$\because$　$-1\le\cos\theta\le 1$（最大）

故當 $\cos\theta=1$ 代入 $13\cos\theta$ 得 13，是為最大內積

(　　　) 3.如圖，正六邊形 $ABCDEF$，對角線交於 O，設 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{c}$，則下列敘述何者<u>錯誤</u>？

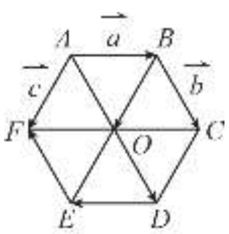


(A) $\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{c}$　(B) $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{b}$　(C) $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{b}$　(D) $\overrightarrow{DE}=-\overrightarrow{a}$

【龍騰自命題】

解答　C

解析　如圖，



(A) $\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{c}$　(B) $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{b}$　(D) $\overrightarrow{DE}=-\overrightarrow{a}$ 皆正確　(C) $\overrightarrow{EF}=-\overrightarrow{b}$

(　　　) 4.設直線 L_1 的斜率為 -2 且通過點$(0,-4)$，又直線 L_2 的 x、y 軸截距分別為 1、2，則下列敘述何者正確？ (A)L_1 與 L_2 相交於點$(2,-8)$　(B)L_1 與 L_2 相交於點$(4,-6)$　(C)L_1 與 L_2 平行且兩線相距 $\frac{2}{\sqrt{5}}$　(D)L_1 與 L_2 平行且兩線相距 $\frac{6}{\sqrt{5}}$

【100 年歷屆試題.】

解答　D

解析　$L_1：y-(-4)=-2(x-0)$　$\Rightarrow$　$2x+y+4=0$

$L_2：\frac{x}{1}+\frac{y}{2}=1$　$\Rightarrow$　$2x+y-2=0$

$\because$　L_1 與 L_2 的係數比：$\frac{2}{2}=\frac{1}{1}\ne\frac{4}{-2}$

$\therefore$　$L_1 // L_2$，而 L_1 與 L_2 的距離 $=\frac{|4-(-2)|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{6}{\sqrt{5}}$

(　　　) 5.已知 $\overrightarrow{a}=(-1,3)$，$\overrightarrow{b}=(2,6)$，試求 $\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{b}$ 上的正射影為 (A)$(\frac{4}{5},\frac{12}{5})$　(B)$(\frac{24}{5},-\frac{18}{5})$　(C)$(-\frac{24}{5},-\frac{18}{5})$　(D)$(\frac{18}{5},-\frac{12}{5})$

【龍騰自命題.】

解答　A

解析　$\overrightarrow{a}=(-1,3)$，$\overrightarrow{b}=(2,6)$

$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=(-1)\times 2+3\times 6=16$

$|\overrightarrow{b}|=\sqrt{2^2+6^2}=\sqrt{4+36}=2\sqrt{10}$　$\therefore$

$\frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{b}|^2}\overrightarrow{b}=\frac{16}{40}(2,6)=(\frac{4}{5},\frac{12}{5})$

(　　　) 6.設 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 為平面上的兩個向量，若 $|\overrightarrow{a}|=|\overrightarrow{b}|=2$ 且 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=2$，則 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的夾角為何？(A)15°　(B)30°　(C)45°　(D)60°

【094 年歷屆試題.】

解答　D

解析　設 $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$ 夾角為 θ，則 $\cos\theta=\frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|}=\frac{2}{2\times 2}=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$　$\theta=60°$（$\because$　$0°\le\theta\le 180°$）

$\therefore$　$\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的夾角為 60°

(　　　) 7.設 $A(1,-3)$、$B(7,5)$、$C(-2,3)$，則△ABC 中 $\overline{AB}$ 邊上的高為　(A)4　(B)6　(C)$\frac{32}{5}$　(D)8

【龍騰自命題.】

解答　B

解析　過 $A(1,-3)$、$B(7,5)$的直線為 $\frac{y-5}{x-7}=\frac{-3-5}{1-7}$

$\Rightarrow$　$\overleftrightarrow{AB}:4x-3y-13=0$

△ABC 中 $\overline{AB}$ 上的高為頂點 $C(-2,3)$到 $\overleftrightarrow{AB}: 4x-3y-13=0$ 之距離

即此高 $=\dfrac{|4(-2)-3\times3-13|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\dfrac{30}{5}=6$

(　　)8.$A(4,5)$、$B(-5,2)$，若直線 L：$2x-y+3=0$ 交 $\overline{AB}$ 於 P，則 $\overline{AP}$：$\overline{PB}=$
(A)2：3　(B)6：5　(C)3：2　(D)5：2

【龍騰自命題.】

解答 A

解析 $\overline{AP}:\overline{PB}=\dfrac{|8-5+3|}{\sqrt5}:\dfrac{|-10-2+3|}{\sqrt5}=6:9=2:3$

(　　)9.直線 L 經過 $A(0,2\sqrt2)$，並通過第三象限，且 L 與原點的距離為 2，則 L 的方程式為　(A) $x-y+2\sqrt2=0$　(B) $x-\sqrt2 y+4=0$
(C) $\sqrt2 x-y+4=0$　(D) $x+y-2\sqrt2=0$

【龍騰自命題.】

解答 A

解析 過 $(0,2\sqrt2)$ 及第三象限的直線其斜率 $m>0$

設所求直線為 $y-2\sqrt2=m(x-0)$　⇒　$mx-y+2\sqrt2=0$，與(0,0)之距離為 2

⇒ $\dfrac{|0-0+2\sqrt2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2$　⇒　$2\sqrt{m^2+1}=2\sqrt2$　⇒　$m^2+1=2$

⇒　$m^2=1$ 取 $m=1$（因 $m>0$）　∴　所求直線為 $x-y+2\sqrt2=0$

(　　)10.設向量 $\vec{a}=(3,4)$，向量 $\vec{b}\,//\,\vec{a}$，且 $\vec{a}\cdot\vec{b}=-50$，則

$|2\vec{a}+3\vec{b}|=$　(A)20　(B)40　(C)60　(D)80

【102 年歷屆試題.】

解答 A

解析 ∵　$\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 互相平行且 $\vec{a}\cdot\vec{b}=-50<0$

∴　$\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 互為反向，即夾角為 180°

$|\vec{a}|=\sqrt{3^2+4^2}=5$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos180^\circ=5\times|\vec{b}|\times(-1)=-5|\vec{b}|=-50$　⇒

$|\vec{b}|=10$

$|2\vec{a}+3\vec{b}|^2=4|\vec{a}|^2+12\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2=4\times5^2+12\times(-50)+9\times10^2=400$

故$|2\vec{a}+3\vec{b}|=\sqrt{400}=20$

〈另解〉

∵　$\vec{b}\,//\,\vec{a}$　　∴　可設 $\vec{b}=t\vec{a}$，其中 t 為實數

則 $\vec{b}=t(3,4)=(3t,4t)$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=(3,4)\cdot(3t,4t)=3\times3t+4\times4t=25t$

∵　$\vec{a}\cdot\vec{b}=-50$　　∴　$25t=-50$　⇒　$t=-2$

則 $\vec{b}=(3\times(-2),4\times(-2))=(-6,-8)$

而 $2\vec{a}+3\vec{b}=2(3,4)+3(-6,-8)=(6,8)+(-18,-24)=(-12,-16)$

故$|2\vec{a}+3\vec{b}|=\sqrt{(-12)^2+(-16)^2}=\sqrt{400}=20$

(　　)11.已知三向量 $\vec{a}=(3,4)$，$\vec{b}=(2,6)$，$\vec{c}=(1,1)$，則

$\sqrt{\vec{a}\cdot(2\vec{b}+3\vec{c})}$ 的值 $=$　(A) $\sqrt{39}$　(B) $\sqrt{17}$　(C)9　(D)6

【龍騰自命題.】

解答 C

解析

$\sqrt{\vec{a}\cdot(2\vec{b}+3\vec{c})}=\sqrt{(3,4)\cdot[2(2,6)+3(1,1)]}=\sqrt{(3,4)\cdot(7,15)}=$

$\sqrt{3\times7+4\times15}=\sqrt{81}=9$

(　　)12.在△ABC 中，$\overline{AB}=8$，$\overline{AC}=2$，若∠BAC 之角平分線交 $\overline{BC}$ 於 D，且 $\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，則 $x-y=$　(A) $-\frac{1}{5}$　(B) $-\frac{2}{5}$　(C) $-\frac{3}{5}$　(D) $-\frac{4}{5}$

【隨堂講義補充題.】

解答 C

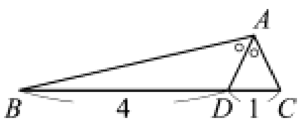
解析 ∵　$\overline{BD}:\overline{DC}=\overline{AB}:\overline{AC}=8:2=4:1$

由向量內分點公式得

$\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{4+1}\overrightarrow{AB}+\dfrac{4}{4+1}\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{5}\overrightarrow{AB}+\dfrac{4}{5}\overrightarrow{AC}$

得 $x=\dfrac{1}{5}$，$y=\dfrac{4}{5}$

故 $x-y=\dfrac{1}{5}-\dfrac{4}{5}=-\dfrac{3}{5}$



(　　)13.設 $B(4,-3)$，$\overrightarrow{AB}=(8,6)$，則 A 點坐標為　(A)(4,3)　(B)(−4,−9)　(C)(4,−3)　(D)(12,3)

【龍騰自命題.】

解答 B

(　　)14.若$|\vec{a}|=4$，$|\vec{b}|=3$，$\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 方向相反，則 $\vec{a}\cdot\vec{b}=$　(A)12　(B)−12　(C)0　(D)6

【龍騰自命題.】

解答 B

解析 ∵　$\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 方向相反，即 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 交角 $\theta=180^\circ$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=4\times3\times\cos180^\circ=-12$

(　　)15.已知 $\vec{a}=(-1,4)$，$\vec{b}=(2,3)$，若 $\vec{a}+k\vec{b}$ 與 $2\vec{a}-\vec{b}$ 平行，

則 $k=$ (A)$-\frac{1}{3}$ (B)$-\frac{1}{2}$ (C) 2 (D) 3

【隨堂講義補充題.】

解答 B

解析 $\vec{a}+k\vec{b}=(-1,4)+k(2,3)=(2k-1,3k+4)$

$2\vec{a}-\vec{b}=2(-1,4)-(2,3)=(-4,5)$

$\because\ (\vec{a}+k\vec{b})//(2\vec{a}-\vec{b})$

$\Rightarrow\ \frac{2k-1}{-4}=\frac{3k+4}{5}$

$\Rightarrow\ 5(2k-1)=-4(3k+4)\ \Rightarrow\ k=-\frac{1}{2}$

( )16.設 $|\vec{a}|=\sqrt{2}$，$|\vec{b}|=3$，$\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 之夾角為 $\frac{\pi}{4}$，試求 $|2\vec{a}-\vec{b}|=$

(A) $\sqrt{5}$ (B) $\sqrt{6}$ (C) $\sqrt{7}$ (D) $\sqrt{8}$

【隨堂講義補充題.】

解答 A

解析 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\times|\vec{b}|\times\cos 45°=\sqrt{2}\times3\times\frac{\sqrt{2}}{2}=3$

$\because\ |2\vec{a}-\vec{b}|^2=(2\vec{a}-\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b})$

$=4|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=8-4\times3+9=5$

$\therefore\ |2\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{5}$

( )17.已知 $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=5$，求 $|2\vec{a}-3\vec{b}|=$ (A)5 (B)6 (C) $\sqrt{37}$ (D) $\sqrt{38}$

【龍騰自命題.】

解答 C

解析

$|2\vec{a}-3\vec{b}|^2=4|\vec{a}|^2-12\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2=4\times2^2-12\times5+9\times3^2=37$

$\therefore\ |2\vec{a}-3\vec{b}|=\sqrt{37}$

( )18.設 $A(1,1)$、$B(3,4)$、$C(-1,-2)$、$D(0,-1)$，則 $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{CD}$ 上的正射影為 (A)$(\frac{5}{2},\frac{5}{2})$ (B)$(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$ (C)$(-\frac{5}{2},-\frac{5}{2})$ (D)$(\frac{5}{\sqrt{2}},\frac{5}{\sqrt{2}})$

【課本練習題-自我評量.】

解答 A

解析 $\overrightarrow{AB}=(3-1,4-1)=(2,3)$

$\overrightarrow{CD}=(0-(-1),-1-(-2))=(1,1)$

$\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{CD}$ 上的正射影為

$(\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{CD}|^2})\overrightarrow{CD}=(\frac{2\times1+3\times1}{(\sqrt{1^2+1^2})^2})(1,1)$

$=\frac{5}{2}(1,1)=(\frac{5}{2},\frac{5}{2})$

( )19.坐標平面上三點 $A(-102,101)$、$B(-99,97)$、$C(-100,106)$ 所形成之 $\triangle ABC$ 面積為 (A)$\frac{7}{4}$ (B)$\frac{7}{2}$ (C)$\frac{23}{4}$ (D)$\frac{23}{2}$

【隨堂講義補充題.】

解答 D

解析 $\overrightarrow{AB}=(-99-(-102),97-101)=(3,-4)$

$\overrightarrow{AC}=(-100-(-102),106-101)=(2,5)$

則 $\triangle ABC$ 的面積 $=\frac{1}{2}|3\times5-(-4)\times2|=\frac{23}{2}$

( ) 20.設 $|\vec{a}+\vec{b}|=5$ 且 $|\vec{a}-\vec{b}|=5$，則 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 兩向量的夾角為

(A)30° (B)45° (C)60° (D)90°

【龍騰自命題.】

解答 D

解析 $\because\ |\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|=5$

$\therefore\ |\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}-\vec{b}|^2$，即

$|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{b}=0$，即 $\vec{a}\perp\vec{b}$

$\therefore$ 夾角為 90°

( ) 21.兩向量 $\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$ 不平行，且 $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=1$，則 $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})$ 與 $(\vec{\alpha}-\vec{\beta})$ 之夾角為 (A)30° (B)45° (C)60° (D)90°

【龍騰自命題.】

解答 D

解析 令夾角為 θ

$$\cos\theta=\frac{(\vec{\alpha}+\vec{\beta})\cdot(\vec{\alpha}-\vec{\beta})}{|\vec{\alpha}+\vec{\beta}||\vec{\alpha}-\vec{\beta}|}=\frac{|\vec{\alpha}|^2-|\vec{\beta}|^2}{|\vec{\alpha}+\vec{\beta}||\vec{\alpha}-\vec{\beta}|}=\frac{0}{|\vec{\alpha}+\vec{\beta}||\vec{\alpha}-\vec{\beta}|}=0$$

$\therefore\ \theta=90°$

( ) 22.已知單位向量 $\vec{a}$ 與單位向量 $\vec{b}$ 的夾角為 $\frac{\pi}{3}$ 且 $\vec{a}+3\vec{b}$ 與 $m\vec{a}+\vec{b}$ 互相垂直，則 m 的值等於 (A)$-\frac{7}{5}$ (B)$\frac{7}{5}$ (C)1 (D)$-\frac{5}{3}$

【龍騰自命題.】

解答 A

解析 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=1\cdot 1\cdot\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

$(\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b})\cdot(m\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})=0 \Rightarrow m|\overrightarrow{a}|^2+(1+3m)\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+3|\overrightarrow{b}|^2=0$

$\Rightarrow m+(1+3m)\frac{1}{2}+3=0 \Rightarrow m=-\frac{7}{5}$

(　　)23.設 $\overrightarrow{a}=(2,-1)$，$\overrightarrow{b}=(-1,y)$，若 $\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}$，則 $y=$ (A) $\frac{1}{2}$

(B) $-\frac{1}{2}$ (C)2 (D) -2

【龍騰自命題.】

解答 D

(　　)24.設平面二向量 $\overrightarrow{u}=(2\cos\theta,\sin\theta)$，$\overrightarrow{v}=(\sin\theta,2\cos\theta)$ 且其內積

$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=1$，若 $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$，則 θ 之值可能為何？(A) $\frac{\pi}{12}$ (B) $\frac{\pi}{6}$ (C) $\frac{\pi}{4}$ (D) $\frac{\pi}{3}$

【103 年歷屆試題.】

解答 A

解析

$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=(2\cos\theta,\sin\theta)\cdot(\sin\theta,2\cos\theta)=2\cos\theta\sin\theta+\sin\theta\times 2\cos\theta$

$=2\times\underline{2\sin\theta\cos\theta}=2\underline{\sin 2\theta}$

$\because$ $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=1$ $\therefore$ $2\sin 2\theta=1 \Rightarrow \sin 2\theta=\frac{1}{2}$

又 $0\le\theta\le\frac{\pi}{2} \xRightarrow{\times 2} 0\le 2\theta\le\pi$

而 $\sin\frac{\pi}{6}=\sin\frac{5}{6}\pi=\frac{1}{2}$

則 $2\theta=\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5}{6}\pi \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{12}$ 或 $\frac{5}{12}\pi$

故選(A)

(　　)25.設 $A=(2,1)$、$B=(-1,3)$、$C=(0,2)$，則 $\left|\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{CB}\right|=$ (A) $\sqrt{5}$

(B) 2 (C) $\sqrt{3}$ (D)1

【隨堂測驗.】

解答 D

解析 $\overrightarrow{AB}=(-3,2)$，$\overrightarrow{CB}=(-1,1)$

$\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{CB}=(-3,2)-2(-1,1)=(-3,2)-(-2,2)=(-1,0)$

$\left|\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{CB}\right|=\sqrt{(-1)^2+0^2}=1$