向量 0924 班級　　　　姓名　　　　座號

一、單選題 (25 題 每題 4 分 共 100 分)

(　　) 1.若 $A(1,-1)$、$B(-3,1)$，則 $\left|\overrightarrow{AB}\right|=$ (A) 2 (B) 3 (C) $2\sqrt{5}$ (D) $3\sqrt{5}$

解答　C

解析　$\overrightarrow{AB}=\left(-3-1,1-(-1)\right)=(-4,2)$

則 $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(-4)^2+2^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

(　　) 2.設 $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$、$\overrightarrow{c}$ 為平面上之三個向量且 $\overrightarrow{a}=(\cos 30°,\sin 30°)$，

$\overrightarrow{b}=(\cos 150°,\sin 150°)$，$\overrightarrow{c}=(\cos 270°,\sin 270°)$，試求

$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}=$ (A)(1,0)(B)(0,1)(C)(1,1)　(D)(0,0)

解答　D

解析　$\overrightarrow{a}=(\cos 30°,\sin 30°)=(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$

$\overrightarrow{b}=(\cos 150°,\sin 150°)=(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$

$\overrightarrow{c}=(\cos 270°,\sin 270°)=(0,-1)$

$\therefore\ \overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}=(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}+0,\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1)=(0,0)$

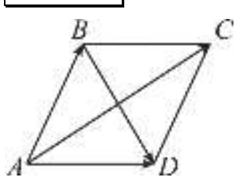
(　　) 3.在坐標平面上的平行四邊形 $ABCD$（按順序）中，若 $\overrightarrow{AB}=(4,8)$、

$\overrightarrow{AD}=(1,4)$，則 $|\overrightarrow{AC}|+|\overrightarrow{BD}|=$　(A) $4\sqrt{5}+\sqrt{17}$　(B)18　(C) $8\sqrt{5}+2\sqrt{17}$

(D)36

解答　B

解析



$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=(4,8)+(1,4)=(5,12)$

$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AD}+(-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=(1,4)-(4,8)=(-3,-4)$

而 $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{5^2+12^2}=13$，$|\overrightarrow{BD}|=\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}=5$

故 $|\overrightarrow{AC}|+|\overrightarrow{BD}|=13+5=18$

(　　) 4.已知△ABC 中，$\overline{AB}=5$，$\overline{BC}=7$，$\overline{AC}=8$，則下列各內積中，

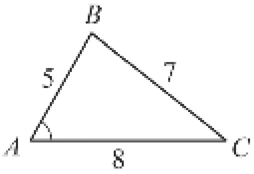
何者為最大？(A) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ (B) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}$ (C) $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$ (D) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$

解答　C

解析　$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{\overline{AC}^2+\overline{AB}^2-\overline{BC}^2}{2\overline{AC}\times\overline{AB}}$

$\Rightarrow\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos A=\overline{AB}\times\overline{AC}\times\dfrac{\overline{AC}^2+\overline{AB}^2-\overline{BC}^2}{2\overline{AC}\times\overline{AB}}$

$=\dfrac{1}{2}(\overline{AC}^2+\overline{AB}^2-\overline{BC}^2)=\dfrac{1}{2}(8^2+5^2-7^2)=20$



同理 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}=\dfrac{1}{2}(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-\overline{AC}^2)=\dfrac{1}{2}(5^2+7^2-8^2)=5$

$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\dfrac{1}{2}(\overline{BC}^2+\overline{AC}^2-\overline{AB}^2)=\dfrac{1}{2}(7^2+8^2-5^2)=44$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=(-\overrightarrow{BA})\cdot\overrightarrow{BC}=-(\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA})=-5$

$\therefore$ $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$ 為最大

(　　) 5.設 $A(3,-7)$、$B(-2,1)$、$C(1,3)$，則△ABC 的面積為(A)9　(B)13　(C)15

(D)17

解答　D

解析　$\overrightarrow{AB}=(-5,8)$，$\overrightarrow{AC}=(-2,10)$

$\Rightarrow$　△ABC 面積 $=\dfrac{1}{2}|-5\times10-8\times(-2)|=17$

(　　) 6.設 $\overrightarrow{u}$，$\overrightarrow{v}$ 為平面上的兩個單位向量，若其內積為 $\dfrac{1}{2}$，則 $\overrightarrow{u}$ 與 $\overrightarrow{v}$

的夾角為何？　(A)30°　(B)45°　(C)60°　(D)90°

解答　C

解析　$\because$　$\overrightarrow{u}$，$\overrightarrow{v}$ 為單位向量

則 $|\overrightarrow{u}|=1$，$|\overrightarrow{v}|=1$，且 $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\dfrac{1}{2}$

設 $\overrightarrow{u}$ 與 $\overrightarrow{v}$ 的夾角為 θ

又 $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=|\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|\cos\theta$　$\Rightarrow$　$\dfrac{1}{2}=1\times1\times\cos\theta$　$\Rightarrow$　$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$

$\therefore$　$\theta=60°$

(　　) 7.已知 $A(-1,2)$，$B(3,-5)$，$C(1,6)$，設 G 為△ABC 的重心，M 為 $\overline{AC}$

的中點，則 $\overrightarrow{BG}-\overrightarrow{AM}=$　(A)$(-3,4)$　(B)$(-1,8)$　(C)$(-3,8)$　(D)$(-1,4)$

解答　A

解析　重心公式得 $G(\dfrac{-1+3+1}{3},\dfrac{2-5+6}{2})=G(\dfrac{3}{3},\dfrac{3}{3})=G(1,1)$

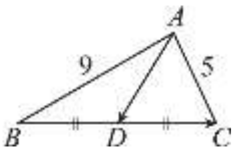
又由中點公式得 $M(\dfrac{-1+1}{2},\dfrac{2+6}{2})=M(0,4)$

$\therefore\ \overrightarrow{BG}-\overrightarrow{AM}=(1-3,1-(-5))-(0-(-1),4-2)=(-2,6)-(1,2)=(-3,4)$

(　　) 8.在△ABC中，若D為線段$\overline{BC}$的中點，且$\overline{AB}=9$、$\overline{AC}=5$，則向量內積$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=$ (A)-28(B)-14(C)14(D)28

解答 A

解析



$\because$ D為$\overline{BC}$的中點

$\therefore\ \overline{BD}:\overline{DC}=1:1 \Rightarrow \overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC})\cdot(-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=-\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC}\right|^2$

$=-\frac{1}{2}\times 9^2+\frac{1}{2}\times 5^2=-28$

(　　) 9.設向量$\overrightarrow{u}=(a,2)$，$\overrightarrow{v}=(3,2a)$，$\overrightarrow{w}=(-1,2)$，則下列敘述何者正確？ (A)若$2\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$與$\overrightarrow{w}$平行，則$a=-3$ (B)若$(2\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\cdot\overrightarrow{w}=0$，則$a=-\frac{5}{2}$ (C)若$|2\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}|=5$，則$a=-\frac{1}{2}$ (D)若$|2\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}|=|\overrightarrow{w}|$，則$a=0$

解答 B

解析 $2\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}=2(a,2)+(3,2a)=(2a,4)+(3,2a)=(2a+3,4+2a)$

$|2\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}|=\sqrt{(2a+3)^2+(4+2a)^2}=\sqrt{(4a^2+12a+9)+(16+16a+4a^2)}$

$=\sqrt{8a^2+28a+25}$

$|\overrightarrow{w}|=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$

(A)$\because$ $2\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$與$\overrightarrow{w}$平行 $\therefore\ \frac{2a+3}{-1}=\frac{4+2a}{2}$

$\Rightarrow 2\times(2a+3)=-(4+2a) \Rightarrow 4a+6=-4-2a$

$\Rightarrow 6a=-10 \Rightarrow a=-\frac{5}{3}$

(B)$\because$ $(2\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\cdot\overrightarrow{w}=0$ $\therefore\ (2a+3,4+2a)\cdot(-1,2)=0$

$\Rightarrow (2a+3)\times(-1)+(4+2a)\times 2=0$

$\Rightarrow (-2a-3)+(8+4a)=0 \Rightarrow 2a+5=0 \Rightarrow a=-\frac{5}{2}$

(C)$\because$ $|2\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}|=5$ $\therefore\ \sqrt{8a^2+28a+25}=5$

$\overset{平方}{\Rightarrow} 8a^2+28a+25=25 \Rightarrow 8a^2+28a=0$

$\overset{\div 4}{\Rightarrow} 2a^2+7a=0 \Rightarrow a(2a+7)=0 \Rightarrow a=0$ 或 $-\frac{7}{2}$

(D)$\because$ $|2\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}|=|\overrightarrow{w}|$ $\therefore\ \sqrt{8a^2+28a+25}=\sqrt{5}$

$\overset{平方}{\Rightarrow} 8a^2+28a+25=5 \Rightarrow 8a^2+28a+20=0$

$\overset{\div 4}{\Rightarrow} 2a^2+7a+5=0 \Rightarrow (2a+5)(a+1)=0 \Rightarrow a=-\frac{5}{2}$ 或 -1

(　　) 10.△ABC中，$\overrightarrow{AB}=(x,-2)$，$\overrightarrow{AC}=(-2,4)$，$\overrightarrow{CB}=(3,y)$，試求$x+y$之值為 (A)4 (B)2 (C)$-3$ (D)-5

解答 D

解析 $\because$ △ABC中，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}+\left(-\overrightarrow{CB}\right)+\left(-\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{0}$

$\Rightarrow (x,-2)-(3,y)-(-2,4)=(0,0)$

$\Rightarrow \begin{cases} x-3+2=0 \\ -2-y-4=0 \end{cases}$ 得$x=1$，$y=-6$

故$x+y=1+(-6)=-5$

(　　) 11.求兩直線$3x+4y-7=0$與$4x+3y+2=0$所夾鈍角平分線方程式為 (A)$2x+5y-16=0$ (B)$5x+2y+11=0$ (C)$x+y+9=0$ (D)$x-y+9=0$

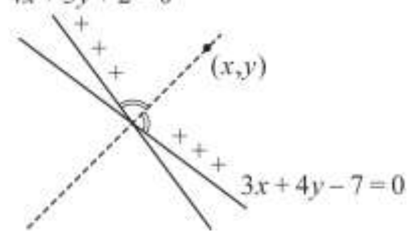
解答 D

解析 設角平分線上的點為(x,y)到角兩邊的直線距離相等

$\Rightarrow \frac{|4x+3y+2|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{|3x+4y-7|}{\sqrt{3^2+4^2}}$

取 $+(4x+3y+2)=+(3x+4y-7)$

$\Rightarrow$ $x-y+9=0$為所求的鈍角平分線



(　　) 12.過點$(1,-4)$且與原點距離為1的直線有幾條？ (A)1條 (B)2條 (C)3條 (D)無限多條

解答 B

解析 設所求直線$y+4=m(x-1)$，即$mx-y-m-4=0$

$\Rightarrow \frac{|-m-4|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1 \Rightarrow (m+4)^2=m^2+1$

$\Rightarrow 8m=-15 \Rightarrow m=\frac{-15}{8}$

另有一條無斜率之直線$x=1$，故共2條

(　　) 13.若正△ABC的邊長為6，則$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$之值為 (A)$18\sqrt{3}$ (B)$-18\sqrt{3}$ (C)18 (D)-18

解答 D

解析 正△ABC內角均為60°

而 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\times\left|\overrightarrow{BC}\right|\times\cos120°=6\times6\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-18$

(　　　)14.設 $A(1,1)$，$B(4,5)$，$C(8,2)$為△ABC 三頂點，求∠B＝　(A)0°　(B)45°　(C)90°　(D)60°

解答　C

解析　$\overline{AB}$、$\overline{BC}$ 為∠B 的兩鄰邊

已知 $\overrightarrow{BA}=(-3,-4)$，$\overrightarrow{BC}=(4,-3)$，則 $\cos B=\dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}=0$　∴　∠B＝90°

(　　　) 15.設 $A(1,1)$、$B(3,4)$、$C(-1,-2)$、$D(0,-1)$，則 $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{CD}$ 上的正射影為　(A)$(\frac{5}{2},\frac{5}{2})$　(B)$(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$　(C)$(-\frac{5}{2},-\frac{5}{2})$　(D)$(\frac{5}{\sqrt{2}},\frac{5}{\sqrt{2}})$

解答　A

解析　$\overrightarrow{AB}=(3-1,4-1)=(2,3)$

$\overrightarrow{CD}=(0-(-1),-1-(-2))=(1,1)$

$\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{CD}$ 上的正射影為

$$\left(\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{CD}|^2}\right)\overrightarrow{CD}=\left(\frac{2\times1+3\times1}{(\sqrt{1^2+1^2})^2}\right)(1,1)$$

$$=\frac{5}{2}(1,1)=\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right)$$

(　　　) 16.設二向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，且$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=5$，$\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的夾角為$\frac{\pi}{3}$，則$|3\vec{a}-\vec{b}|=$　(A)$\sqrt{31}$　(B)31　(C)$\sqrt{15}$　(D)15

解答　A

解析　$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{3}=2\times5\times\frac{1}{2}=5$

$|3\vec{a}-\vec{b}|^2=9|\vec{a}|^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=9\times2^2-6\times5+5^2=31$

∴　$|3\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{31}$

(　　　) 17.若$\overrightarrow{OB}=(b,4)$，$\overrightarrow{OA}=(10,5)$，則$\overrightarrow{OB}$在$\overrightarrow{OA}$上之正射影為$(4,2)$，則$b$之值為　(A)3　(B)2　(C)−2　(D)−3

解答　A

解析　$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}=(b,4)\cdot(10,5)=10b+20=10(b+2)$

$\left|\overrightarrow{OA}\right|=\sqrt{(10)^2+5^2}=5\sqrt{5}$

$\overrightarrow{OB}$ 在 $\overrightarrow{OA}$ 上正射影為

$$\left(\frac{\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}}{\left|\overrightarrow{OA}\right|^2}\right)\cdot\overrightarrow{OA}=\frac{10(b+2)}{\left(5\sqrt{5}\right)^2}\cdot(10,5)=(4,2)$$

得$b+2=5$　⇒　$b=3$

(　　　) 18.試求 $A(-3,4)$ 到直線 $L:\frac{x}{3}-\frac{y}{4}=-1$的距離為　(A)$\frac{18}{5}$　(B)$\frac{16}{5}$　(C)$\frac{12}{5}$　(D)$\frac{8}{5}$

解答　C

解析　直線 $L:\frac{x}{3}-\frac{y}{4}=-1$

⇒　$4x-3y+12=0$，A 點$(-3,4)$

則 $d(A,L)=\dfrac{|4\times(-3)-3\times4+12|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\dfrac{12}{5}$

(　　　)19.設 $\vec{a}$ 、$\vec{b}$ 為非零向量，若$|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}|-|\vec{b}|$，則 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的夾角為何？　(A)0°　(B)30°　(C)60°　(D)90°

解答　A

解析　$|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}|-|\vec{b}|$，兩邊同時平方，則

$|\vec{a}-\vec{b}|^2=(|\vec{a}|-|\vec{b}|)^2$

又$|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$(|\vec{a}|-|\vec{b}|)^2=|\vec{a}|^2-2|\vec{a}||\vec{b}|+|\vec{b}|^2$

∴　$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|$

若 $\vec{a}$ $\cdot$ $\vec{b}$ 夾角 θ，則$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=1$

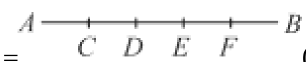
∴　可知 $\cos\theta=1$，即　$\theta=0°$

(　　　) 20.設 $\vec{a}=(2,-4)$，$\vec{b}=(3,5)$，則$4\vec{a}-5\vec{b}=$　(A)$(-3,8)$　(B)$(-7,-41)$　(C)$(10,-37)$　(D)$(-10,-28)$

解答　B

解析

(　　　) 21.如圖，C、D、E、F 將 $\overline{AB}$ 五等分，若$\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{BC}$，則 x ＝



(A)−4　(B)$-\frac{1}{4}$　(C)$\frac{1}{4}$　(D)4

解答　B

(　　　) 22.已知 $\vec{a}=(1,3)$，$\vec{b}=(4,2)$，若$|\vec{a}+t\vec{b}|$為最短，則 t 等於　(A)$\frac{1}{2}$　(B)2　(C)−2　(D)$-\frac{1}{2}$

解答　D

解析　$|\overrightarrow{a}|=\sqrt{10}$，$|\overrightarrow{b}|=2\sqrt{5}$，$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=10$，

$|\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}|^2=|\overrightarrow{a}|^2+2t\,\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+t^2|\overrightarrow{b}|^2=10+20t+20t^2$

$=20(t^2+t+\frac{1}{2})=20[(t+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}]$　　$\therefore$　$t=-\frac{1}{2}$ 時最短

(　　) 23.設兩向量 $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$，$|\overrightarrow{a}|=3$，$|\overrightarrow{b}|=2$，$\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的夾角為 $\frac{2\pi}{3}$，則 $|\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}|=$　(A) $\sqrt{7}$　(B) $\sqrt{19}$　(C) $\sqrt{17}$　(D) $\sqrt{13}$

解答　D

解析　$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta$

$=3\times2\times\cos\frac{2\pi}{3}=-3$

$|\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}|^2=|\overrightarrow{a}|^2+4\,\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+4|\overrightarrow{b}|^2$

$=9+4\times(-3)+16=13$

$\therefore$　$|\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}|=\sqrt{13}$

(　　) 24.設 P 的坐標為 $(3,5)$，且 $\overrightarrow{PQ}=(7,-5)$，試求 Q 點坐標為

(A) $(-2,12)$　(B) $(12,-2)$　(C) $(10,0)$　(D) $(0,10)$

解答　C

解析　設 $Q(x,y)$

則 $\overrightarrow{PQ}=(x-3,y-5)=(7,-5)$

$\therefore$　$\begin{cases} x-3=7 & \Rightarrow\quad x=10 \\ y-5=-5 & \Rightarrow\quad y=0 \end{cases}$

故 $Q(10,0)$

(　　) 25.設平面二向量 $\overrightarrow{u}=(2\cos\theta,\sin\theta)$，$\overrightarrow{v}=(\sin\theta,2\cos\theta)$ 且其內積 $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=1$，若 $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$，則 θ 之值可能為何？　(A) $\frac{\pi}{12}$　(B) $\frac{\pi}{6}$　(C) $\frac{\pi}{4}$

(D) $\frac{\pi}{3}$

解答　A

解析

$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=(2\cos\theta,\sin\theta)\cdot(\sin\theta,2\cos\theta)=2\cos\theta\sin\theta+\sin\theta\times2\cos\theta$

$=2\times\underline{2\sin\theta\cos\theta}=2\ \underline{\sin2\theta}$

$\because$　$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=1$　　$\therefore$　$2\sin2\theta=1$　$\Rightarrow$　$\sin2\theta=\frac{1}{2}$

又 $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$　$\overset{\times2}{\Rightarrow}$　$0\le2\theta\le\pi$

而 $\sin\frac{\pi}{6}=\sin\frac{5}{6}\pi=\frac{1}{2}$

則 $2\theta=\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5}{6}\pi$　$\Rightarrow$　$\theta=\frac{\pi}{12}$ 或 $\frac{5}{12}\pi$

故選(A)