0923 向量　班級　　　姓名　　　座號

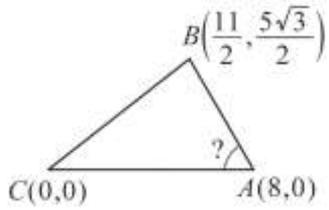
一、單選題 (25 題 每題 4 分 共 100 分)

(　　) 1.坐標平面上以 $A(8,0)$、$B(\frac{11}{2},\frac{5\sqrt{3}}{2})$、$C(0,0)$三點為頂點的$\triangle ABC$中，$\angle BAC$ 的度量為何？(A)30°(B)45°(C)60°(D)120°

【091 年歷屆試題.】

解答　C

解析　由題意，可得圖示如下：



$\because$　所求 $\angle BAC$ 為 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$ 之夾角，先求

$$\overrightarrow{AB}=(\frac{11}{2}-8,\frac{5\sqrt{3}}{2}-0)=(-\frac{5}{2},\frac{5\sqrt{3}}{2})$$

$$\overrightarrow{AC}=(0-8,0-0)=(-8,0)$$

將 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$ 代入夾角公式：

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{(-\frac{5}{2})(-8)+0(\frac{5\sqrt{3}}{2})}{\sqrt{(-\frac{5}{2})^2+(\frac{5\sqrt{3}}{2})^2}\times\sqrt{(-8)^2+0^2}}$$

$$=\frac{20}{\sqrt{\frac{25}{4}+\frac{75}{4}}\times\sqrt{64}}=\frac{20}{\sqrt{\frac{100}{4}}\times 8}=\frac{5}{\frac{10}{2}\times 2}=\frac{1}{2}$$

得 $\cos\theta=\frac{1}{2}$　$\therefore$　夾角 $\theta=60°$

(　　) 2.設 $\overrightarrow{a}=(x+y,8)$，$\overrightarrow{b}=(-2,2x-y)$，若 $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{b}$，則 $x-y=$

(A)-2　(B)2　(C)-6　(D)6

【隨堂講義補充題.】

解答　D

解析　$\overrightarrow{a}=(x+y,8)$，$\overrightarrow{b}=(-2,2x-y)$

$$\because\ \overrightarrow{a}=\overrightarrow{b}\ \Rightarrow\ \begin{cases}x+y=-2\cdots\cdots①\\2x-y=8\cdots\cdots②\end{cases}$$

由①②解得 $x=2$，$y=-4$

故 $x-y=2-(-4)=6$

(　　) 3.設 $A(1,-3)$與 $B(2,-2)$為平面上兩點，若一向量 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{AB}$ 的方向相反，且$|\overrightarrow{a}|=1$，則 $\overrightarrow{a}=$　(A)(1,1)　(B)$(-1,-1)$

(C)$(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$　(D)$(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$

【龍騰自命題.】

解答　D

解析　$\overrightarrow{AB}=(2-1,-2+3)=(1,1)$

$\therefore$　$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{2}$　　$\therefore$　$\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$

又 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{AB}$ 方向相反

$\therefore$　$\frac{\overrightarrow{a}}{|\overrightarrow{a}|}=(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$

$\because$　$|\overrightarrow{a}|=1$　　$\therefore$　$\overrightarrow{a}=(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$

(　　) 4.設 $\overrightarrow{a}=(4,3)$，$\overrightarrow{b}=(x,y)$ 為平面上兩向量，且 $x^2+y^2=40$，則此二向量內積 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ 的最大值為何？　(A)$10\sqrt{10}$

(B)$12\sqrt{10}$　(C)$14\sqrt{10}$　(D)$16\sqrt{10}$

【098 年歷屆試題.】

解答　A

解析　$\overrightarrow{a}=(4,3)$　$\Rightarrow$　$|\overrightarrow{a}|=\sqrt{4^2+3^2}=5$

$\overrightarrow{b}=(x,y)$　$\Rightarrow$　$|\overrightarrow{b}|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

設 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的夾角為 θ

則

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta=5\times2\sqrt{10}\times\cos\theta=10\sqrt{10}\cos\theta\le10\sqrt{10}$$

（$\because$　$-1\le\cos\theta\le1$）

故 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ 的最大值為$10\sqrt{10}$

《另解》

$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=(4,3)\cdot(x,y)=4x+3y$

由柯西不等式：

$(4^2+3^2)(x^2+y^2)\ge(4x+3y)^2$　$\Rightarrow$　$25\times40\ge(4x+3y)^2$

$\Rightarrow$　$(4x+3y)^2-1000\le0$

$\Rightarrow$　$[(4x+3y)+10\sqrt{10}][(4x+3y)-10\sqrt{10}]\le0$

$\Rightarrow$　$-10\sqrt{10}\le4x+3y\le10\sqrt{10}$

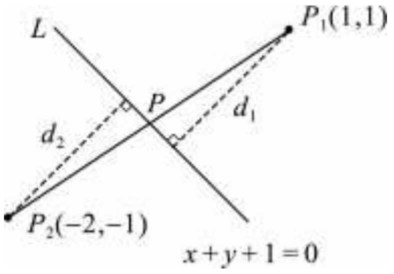
故 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ 的最大值為$10\sqrt{10}$

(　　) 5.設 $P_1(1,1)$、$P_2(-2,-1)$，且直線 L：$x+y+1=0$ 與 $\overline{P_1P_2}$ 交於點 P，則 $\overline{P_1P}:\overline{P_2P}=$(A)1：1(B)3：2(C)2：1(D)2：3

【龍騰自命題.】

解答　B

解析 $\overline{P_1P}:\overline{PP_2}=d_1:d_2=\dfrac{|1+1+1|}{\sqrt{2}}:\dfrac{|-2-1+1|}{\sqrt{2}}=3:2$



(　　) 6.求兩直線 $3x+4y-7=0$ 與 $4x+3y+2=0$ 所夾鈍角平分線方程式為　(A) $2x+5y-16=0$　(B) $5x+2y+11=0$　(C) $x+y+9=0$　(D) $x-y+9=0$

【龍騰自命題.】

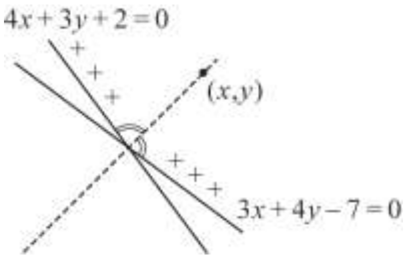
解答 D

解析 設角平分線上的點為 (x,y) 到角兩邊的直線距離相等

$$\Rightarrow \frac{|4x+3y+2|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{|3x+4y-7|}{\sqrt{3^2+4^2}}$$

取 $+(4x+3y+2)=+(3x+4y-7)$

$\Rightarrow$ $x-y+9=0$ 為所求的鈍角平分線



(　　) 7.已知 $\vec{a}=(5,-3)$，$\vec{b}=(7,1)$，則 $2\vec{a}-3\vec{b}=$　(A) $(-11,-9)$　(B) $(9,11)$　(C) $(-2,-4)$　(D) $(12,-2)$

【龍騰自命題.】

解答 A

解析

$$2\vec{a}-3\vec{b}=2(5,-3)-3(7,1)=(10,-6)-(21,3)=(10-21,-6-3)=(-11,-9)$$

(　　) 8.在 $\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=8$，$\overline{AC}=2$，若 $\angle BAC$ 之角平分線交 $\overline{BC}$ 於 D，且 $\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，則 $x-y=$　(A) $-\dfrac{1}{5}$　(B) $-\dfrac{2}{5}$　(C) $-\dfrac{3}{5}$　(D) $-\dfrac{4}{5}$

【隨堂講義補充題.】

解答 C

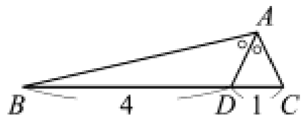
解析 $\because$ $\overline{BD}:\overline{DC}=\overline{AB}:\overline{AC}=8:2=4:1$

由向量內分點公式得

$$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{4+1}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{4+1}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{5}\overrightarrow{AC}$$

得 $x=\dfrac{1}{5}$，$y=\dfrac{4}{5}$

故 $x-y=\dfrac{1}{5}-\dfrac{4}{5}=-\dfrac{3}{5}$



(　　) 9.點 $(-2,3)$ 到 y 軸距離為　(A)2　(B)3　(C) -2　(D) -3

【龍騰自命題.】

解答 A

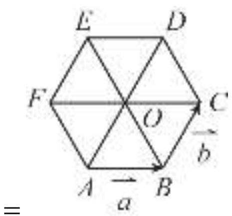
解析 點 $P(a,b)$ 到 y 軸距離為 $|a|$，故此題距離為 2

(　　) 10.點 $P(2,-1)$ 到直線 $L:12x-5y+10=0$ 的距離為(A)2(B)3(C)13(D)39

【龍騰自命題.】

解答 B

(　　) 11.如圖，正六邊形 $ABCDEF$，對角線交於 O 點，設 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$，則 $\overrightarrow{CA}=$

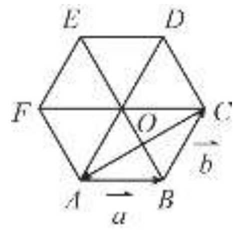


(A) $\vec{a}+\vec{b}$　(B) $\vec{a}-\vec{b}$　(C) $-\vec{a}+\vec{b}$　(D) $-\vec{a}-\vec{b}$

【龍騰自命題.】

解答 D

解析 $\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{AC}=-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=-(\vec{a}+\vec{b})=-\vec{a}-\vec{b}$



(　　) 12.設 $A(1,1)$、$B(3,4)$、$C(-1,-2)$、$D(0,-1)$，則 $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{CD}$ 上的正射影為　(A) $(\dfrac{5}{2},\dfrac{5}{2})$　(B) $(\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2})$　(C) $(-\dfrac{5}{2},-\dfrac{5}{2})$　(D) $(\dfrac{5}{\sqrt{2}},\dfrac{5}{\sqrt{2}})$

【課本練習題-自我評量.】

解答 A

解析 $\overrightarrow{AB}=(3-1,4-1)=(2,3)$

$\overrightarrow{CD}=(0-(-1),-1-(-2))=(1,1)$

$\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{CD}$ 上的正射影為

$$\left(\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{CD}|^2}\right)\overrightarrow{CD}=\left(\frac{2\times1+3\times1}{(\sqrt{1^2+1^2})^2}\right)(1,1)$$

$$=\frac{5}{2}(1,1)=\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right)$$

(　　) 13.設 $A(1,1)$、$B(4,3)$、$C(0,2)$ 為坐標平面上三點，試求 $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 上之正射影長度為　(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　(B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　(C) $\sqrt{2}$　(D) $2\sqrt{2}$

【隨堂講義補充題.】

解答 B

解析 $\overrightarrow{AB}=(4-1,3-1)=(3,2)$，$\overrightarrow{AC}=(0-1,2-1)=(-1,1)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(3,2)\cdot(-1,1)=-1$

又 $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{(-1)^2+(1)^2}=\sqrt{2}$

則 $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 上之正射影為

$$\left(\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|^2}\right)\cdot\overrightarrow{AC}=\left(\frac{-1}{(\sqrt{2})^2}\right)\cdot(-1,1)=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

故其正射影長為 $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

(　　)14.設 $A(8,9)$、$B(-1,5)$、$C(4,6)$，則 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=$ (A)(11,20) (B)$(-5,-1)$ (C)(5,1) (D)$(-13,-7)$

【龍騰自命題.】

解答 D

(　　)15.若 $\overrightarrow{OB}=(b,4)$，$\overrightarrow{OA}=(10,5)$，則 $\overrightarrow{OB}$ 在 $\overrightarrow{OA}$ 上之正射影為 $(4,2)$，則 b 之值為 (A)3 (B)2 (C)-2 (D)-3

【隨堂講義補充題.】

解答 A

解析 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}=(b,4)\cdot(10,5)=10b+20=10(b+2)$

$\left|\overrightarrow{OA}\right|=\sqrt{(10)^2+5^2}=5\sqrt{5}$

$\overrightarrow{OB}$ 在 $\overrightarrow{OA}$ 上正射影為

$$\left(\frac{\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}}{\left|\overrightarrow{OA}\right|^2}\right)\cdot\overrightarrow{OA}=\frac{10(b+2)}{(5\sqrt{5})^2}\cdot(10,5)=(4,2)$$

得 $b+2=5 \Rightarrow b=3$

(　　)16.設 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 為二向量且 $|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=3$，$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{7}$，則 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 之夾角為 (A)15° (B)30° (C)45° (D)60°

【龍騰自命題.】

解答 D

解析 $|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta+|\vec{b}|^2$

$\therefore\ (\sqrt{7})^2=1^2-2\times1\times3\cos\theta+3^2$

$\therefore\ \cos\theta=\frac{1}{2}$

$\therefore\ \theta=60°$

(　　)17. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=$ (A)$\overrightarrow{CA}$ (B)$\overrightarrow{CB}$ (C)$\overrightarrow{BC}$ (D)$\vec{0}$

【龍騰自命題.】

解答 B

解析 $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CB}$

(　　)18.設直線 $L_1:2x+y-5=0$，若直線 L_2 平行 L_1 且通過原點，則 L_1 與 L_2 的距離為(A)$\frac{\sqrt{5}}{3}$ (B)$\frac{\sqrt{5}}{2}$ (C)$\sqrt{5}$ (D)$2\sqrt{5}$

【隨堂講義補充題.】

解答 C

解析 L_2 平行 $L_1:2x+y-5=0$，可設 $L_2:2x+y+k=0$

又 L_2 過原點 $(0,0)$，代入 L_2 得 $0+0+k=0$

$\Rightarrow\ k=0$　可知 $L_2:2x+y=0$

則 $d(L_1,L_2)=\frac{|-5-0|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

(　　)19.兩向量 $\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$ 不平行，且 $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=1$，則 $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})$ 與 $(\vec{\alpha}-\vec{\beta})$ 之夾角為(A)30° (B)45° (C)60° (D)90°

【龍騰自命題.】

解答 D

解析 令夾角為 θ

$$\cos\theta=\frac{(\vec{\alpha}+\vec{\beta})\cdot(\vec{\alpha}-\vec{\beta})}{|\vec{\alpha}+\vec{\beta}||\vec{\alpha}-\vec{\beta}|}=\frac{|\vec{\alpha}|^2-|\vec{\beta}|^2}{|\vec{\alpha}+\vec{\beta}||\vec{\alpha}-\vec{\beta}|}=\frac{0}{|\vec{\alpha}+\vec{\beta}||\vec{\alpha}}$$

$\therefore\ \theta=90°$

(　　)20.已知 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 皆為單位向量且 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的夾角為 $\frac{\pi}{3}$，若 $\vec{a}-\vec{b}$ 與 $m\vec{a}+\vec{b}$ 互相垂直，則 m 值為 (A)1 (B)2 (C)-1 (D)-2

【龍騰自命題.】

解答 A

解析 $\because$ $\vec{a}$、$\vec{b}$ 皆為單位向量，則 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$

$\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=\frac{1}{2}$

又 $\because$ $\vec{a}-\vec{b}$ 與 $m\vec{a}+\vec{b}$ 互相垂直

$\therefore\ 0=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(m\vec{a}+\vec{b})$

$=m|\vec{a}|^2+(1-m)(\vec{a}\cdot\vec{b})-|\vec{b}|^2$

$=m+\frac{1}{2}(1-m)-1=\frac{1}{2}m-\frac{1}{2}$　$\therefore\ m=1$

(　　)21.若 $A(2,3)$，$B(-1,1)$，$C(5,k)$三點共線，則 $k=$ (A)1 (B)3 (C)5 (D)7

【龍騰自命題.】

解答 C

解析 A、B、C 三點共線 $\Rightarrow$ $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{AC}$

$$\Rightarrow (-3,-2)//(3,k-3) \Rightarrow \frac{-3}{-2}=\frac{3}{k-3} \Rightarrow 3k-9=6 \Rightarrow k=5$$

( ) 22.設 r 為實數，$\overrightarrow{a}$ 、$\overrightarrow{b}$ 、$\overrightarrow{c}$ 不為零向量，則下列何者錯誤？

(A) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a}=|\overrightarrow{a}|^2$ (B) $(r\overrightarrow{a})\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{a}\cdot(r\overrightarrow{b})$

(C) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a}$ (D) $|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|^2=|\overrightarrow{a}|^2+|\overrightarrow{b}|^2$

【龍騰自命題.】

解答 D

解析 $|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|^2=|\overrightarrow{a}|^2+2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+|\overrightarrow{b}|^2\neq|\overrightarrow{a}|^2+|\overrightarrow{b}|^2$

( ) 23.設 $A(1,1)$、$B(3,4)$、$C(-2,-5)$，則 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$ (A) -24 (B)12

(C)$(-6,-18)$ (D)$(6,18)$

【龍騰自命題.】

解答 A

( ) 24.設 $\overrightarrow{a}=(1,2)$，$\overrightarrow{b}=(-2,3)$，$\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的夾角為 θ，則 $\sin\theta=$

(A)$\frac{7}{\sqrt{65}}$ (B)$\frac{4}{\sqrt{65}}$ (C)$-\frac{7}{\sqrt{65}}$ (D)$-\frac{4}{\sqrt{65}}$

【課本練習題-自我評量.】

解答 A

解析 $|\overrightarrow{a}|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$

$|\overrightarrow{b}|=\sqrt{(-2)^2+3^2}=\sqrt{13}$

$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=1\times(-2)+2\times3=4$

$$\therefore \cos\theta=\frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|}=\frac{4}{\sqrt{5}\times\sqrt{13}}=\frac{4}{\sqrt{65}}$$

$$\Rightarrow \sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\frac{16}{65}}=\frac{7}{\sqrt{65}}$$

( ) 25.設 $|\overrightarrow{a}|=2$，$|\overrightarrow{b}|=\sqrt{2}$，$\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的夾角為 $\frac{3\pi}{4}$，試求

$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=$ (A)4 (B)-2 (C)3 (D)2【課本練習題-自我評量.】

解答 B

解析 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\frac{3\pi}{4}=2\times\sqrt{2}\times(-\frac{\sqrt{2}}{2})=-2$