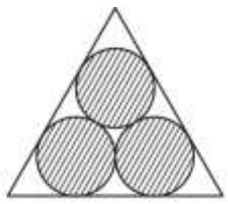
0922 直線方程式 三角函數與應用

班級　　　姓名　　　　　座號

一、單選題 (25 題 每題 4 分 共 100 分)

(　　　) 1.三個半徑為 2 的圓，兩兩外切且內切於正三角形，如圖，則此正三角形之邊長為何？

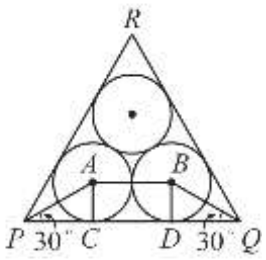


(A)6　(B)$4+2\sqrt{3}$　(C)8　(D)$4+4\sqrt{3}$

【092 年歷屆試題.】

解答　D

解析　如圖所示



$\because$　$\triangle PQR$ 為正三角形　$\Rightarrow$　$\angle RPQ=\angle RQP=60^\circ$

$\Rightarrow$　$\angle APC=30^\circ$，$\angle BQD=30^\circ$

已知圓半徑 $r=2$，則 $\overline{CD}=\overline{AB}=2\times r=4$

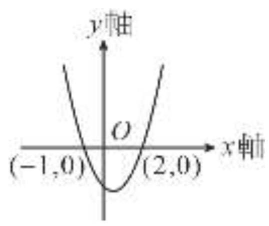
$\overline{PC}=\overline{AC}\times\cot 30^\circ=r\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

$\overline{DQ}=\overline{BD}\times\cot 30^\circ=r\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

$\Rightarrow$　$\overline{PQ}=\overline{PC}+\overline{CD}+\overline{DQ}=2\sqrt{3}+4+2\sqrt{3}=4+4\sqrt{3}$

$\therefore$　此正三角形的邊長為 $4+4\sqrt{3}$

(　　　) 2.設 a、b 為實數，若坐標平面上的拋物線 $y=x^2+ax+b$ 的圖形與 x 軸的交點為$(-1,0)$、$(2,0)$，如圖所示，則 $a+b=$



(A)2　(B)3　(C)-2　(D)-3

【096 年歷屆試題.】

解答　D

解析　$y=x^2+ax+b$

$(-1,0)$代入得 $0=1-a+b\cdots①$

$(2,0)$代入得 $0=4+2a+b\cdots②$

由②$-$①得 $0=3+3a$　$\Rightarrow$　$a=-1$

$a=-1$ 代入①得 $b=-2$　$\therefore$　$a+b=-3$

(　　　) 3.試問在坐標平面上原點至點$(\sin 15^\circ,\sin 75^\circ)$的距離為何？　(A)$\frac{1}{2}$　(B)$\frac{\sqrt{2}}{2}$　(C)$\frac{\sqrt{3}}{2}$　(D)1

【096 年歷屆試題.】

解答　D

解析　$d=\sqrt{(\sin 15^\circ-0)^2+(\sin 75^\circ-0)^2}=\sqrt{\sin^2 15^\circ+\sin^2 75^\circ}$

$=\sqrt{\sin^2 15^\circ+\cos^2 15^\circ}=1$

(　　　) 4.若$\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=\sqrt{3}+1$，$\overline{BC}=2$，且 $\angle B=30^\circ$，則 $\angle A=$　(A)30°　(B)45°　(C)60°　(D)90°

【092 年歷屆試題.】

解答　B

解析　$c=\overline{AB}=\sqrt{3}+1$，$a=\overline{BC}=2$

$\because$

$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B=(\sqrt{3}+1)^2+2^2-2\times(\sqrt{3}+1)\times 2\times\cos 30^\circ$

$=(4+2\sqrt{3})+4-4(\sqrt{3}+1)\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2$

$\Rightarrow$　$b=\sqrt{2}$

又 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$　$\Rightarrow$　$\frac{2}{\sin A}=\frac{\sqrt{2}}{\sin 30^\circ}$

$\Rightarrow$　$\sin A=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow$　$\angle A=45^\circ$或 135°

但 $c>a$　$\Rightarrow$　$\angle C>\angle A$　$\Rightarrow$　$\angle A=135^\circ$不合

$\therefore$　$\angle A=45^\circ$

(　　　) 5.有一繩子的長度是 24 公分，若圍成正三角形的面積為 a 平方公分；圍成正方形的面積為 b 平方公分；圍成正六邊形的面積為 c 平方公分，則下列何者正確？

(A)$a<b<c$　(B)$a<c<b$　(C)$c<a<b$　(D)$c<b<a$

【095 年歷屆試題.】

解答　A

解析　$\because$　繩子的長度為 24 公分

$\Rightarrow$　正三角形、正方形、正六邊形的邊長分別為 8 公分、6 公分、4 公分

$\Rightarrow$　正三角形面積為 $a=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 8^2=16\sqrt{3}$（平方公分）

正方形面積為 $b=6^2=36$（平方公分）

正六邊形面積為 $c=6\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times 4^2=24\sqrt{3}$（平方公分）

$\therefore$　$a<b<c$

(　　　) 6.設 θ 為銳角，若 $\tan\theta=\sqrt{2}$，試求 $\sqrt{3}\sin\theta+\sqrt{6}\cos\theta=$

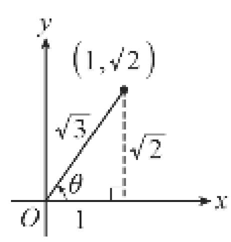
(A)$\sqrt{2}$　(B)$\sqrt{3}$　(C)$2\sqrt{2}$　(D)$2\sqrt{3}$

【097 年歷屆試題.】

解答　C

解析　$\because$　θ 為銳角，且 $\tan\theta=\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{1}$

如圖所示：



$\therefore$

$$\sqrt{3}\sin\theta+\sqrt{6}\cos\theta=\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+\sqrt{6}\times\frac{1}{\sqrt{3}}=\sqrt{2}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$$

(　　　) 7.設 $A(0,6)$、$B(-12,-24)$、$C(24,12)$為坐標平面上之三點，試問△ABC 之重心坐標為何？ (A)(2,2) (B)(4, −2) (C)$(9,-\frac{3}{2})$ (D)(18, −6)

【095 年歷屆試題.】

解答 B

解析 ∵ $A(0,6)$、$B(-12,-24)$、$C(24,12)$

∴ △ABC 之重心坐標為

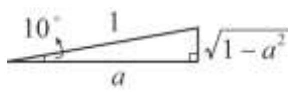
$$(\frac{0+(-12)+24}{3},\frac{6+(-24)+12}{3})=(4,-2)$$

(　　　) 8.設 $\cos10°=a$，則 $\sin200°=$ (A)$-2\sqrt{1-a^2}$ (B)$-2a\sqrt{1-a^2}$ (C)$2\sqrt{1-a^2}$ (D)$2a\sqrt{1-a^2}$

【093 年歷屆試題.】

解答 B

解析 $\sin200°=\sin(180°+20°)=-\sin20°=-2\sin10°\cos10°$



又已知 $\cos10°=a$ ⇒ $\sin10°=\sqrt{1-a^2}$

∴ $\sin200°=-2\times\sqrt{1-a^2}\times a=-2a\sqrt{1-a^2}$

(　　　) 9.若在坐標平面上的平行四邊形 $ABCD$ 中，點 A、B、C 的坐標分別為(5,2)、(1,3)、(−4,3)，則 D 點之坐標為何？ (A)(1,8) (B)(0,2) (C)(2,7) (D)(3,9)

【096 年歷屆試題.】

解答 B

解析 利用平行四邊形對角線互相平分

設 D 點坐標為(x,y)

又 $A(5,2)$、$B(1,3)$、$C(-4,3)$

∵ $\overline{AC}$ 中點$=\overline{BD}$ 中點

$$\Rightarrow (\frac{5+(-4)}{2},\frac{2+3}{2})=(\frac{1+x}{2},\frac{3+y}{2}) \Rightarrow x=0，y=2$$

∴ D 點坐標為(0,2)

《另解》

設 D 點坐標為(x,y)

又知 $A(5,2)$、$B(1,3)$、$C(-4,3)$

⇒ $x=5+(-4)-1=0$ ⇒ $y=2+3-3=2$

∴ D 點坐標為(0,2)

(　　　) 10.設直線 L 的斜率為 2 且在 x 軸之截距為 3，請問下列哪一點在直線 L 上？(A)(5,5)(B)(6,6)(C)(7,7)(D)(8,8)

【095 年歷屆試題.】

解答 B

解析 ∵ 直線 L 之 x 截距為 3 ⇒ L 過點(3,0)

又 L 的斜率 $m=2$

由點斜式知直線 L 方程式為 $y-0=2(x-3)$即 $2x-y-6=0$

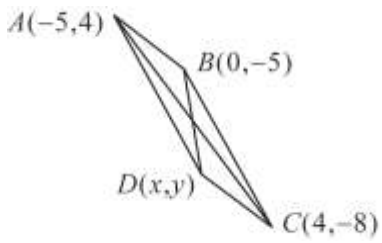
又(6,6)滿足方程式 $2x-y-6=0$ ∴ 點(6,6)在直線 L 上

(　　　) 11.在坐標平面上的平行四邊形 $ABCD$ 中，若 A、B、C 三點的坐標分別為(−5,4)、(0,−5)、(4,−8)，則 D 點應落在下列哪一個象限？ (A)第一象限 (B)第二象限 (C)第三象限 (D)第四象限

【097 年歷屆試題.】

解答 B

解析



設 $D(x,y)$

由平行四邊形對角線互相平分的性質知：$\overline{AC}$ 中點$=\overline{BD}$ 中點

$$\Rightarrow (\frac{-5+4}{2},\frac{4+(-8)}{2})=(\frac{x+0}{2},\frac{y+(-5)}{2}) \Rightarrow -5+4=x \Rightarrow x=-1$$

$4+(-8)=y-5$ ⇒ $y=1$

∴ $D(-1,1)$落在第二象限

(　　　) 12.設 A、B、C 為一圓之圓周上三點，若 $\overline{AB}=4$、$\overline{BC}=6$、$\overline{CA}=8$，則該圓之面積為何？ (A)$\frac{256}{15}\pi$ (B)$\frac{256}{13}\pi$ (C)$\frac{81}{4}\pi$ (D)$\frac{81}{2}\pi$

【099 年歷屆試題.】

解答 A

解析 令圓的半徑為 R

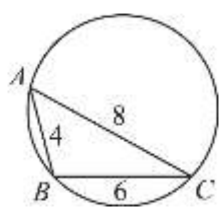
由餘弦定理知：

$$\cos A=\frac{\overline{AB}^2+\overline{CA}^2-\overline{BC}^2}{2\overline{AB}\times\overline{CA}}=\frac{4^2+8^2-6^2}{2\times4\times8}=\frac{11}{16}$$

則 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-(\frac{11}{16})^2}=\frac{3\sqrt{15}}{16}$

由正弦定理知：$\frac{\overline{BC}}{\sin A}=2R$ ⇒ $\frac{6}{\frac{3\sqrt{15}}{16}}=2R$ ⇒ $R=\frac{16}{\sqrt{15}}$

因此圓面積$=\pi R^2=\pi\times(\frac{16}{\sqrt{15}})^2=\frac{256}{15}\pi$



(　　　) 13.設 a 為實數，且直線$(3a-1)x-2y=a+1$ 沒有通過第

一象限，則 a 的可能範圍為何？ (A)$a<-1$ (B)$-1\le a\le\frac{1}{3}$ (C)$\frac{1}{3}<a<1$ (D)$a\ge 1$

【096 年歷屆試題.】

解答 B

解析 $(3a-1)x-2y=a+1 \Rightarrow y=\frac{3a-1}{2}x-\frac{a+1}{2}$

即直線的 y 截距為 $-\frac{a+1}{2}$，斜率 $m=\frac{3a-1}{2}$

$\because$ 直線沒有通過第一象限

$\Rightarrow$ y 截距 ≤ 0 且斜率 $m\le 0$ $\Rightarrow$ $-\frac{a+1}{2}\le 0$ 且 $\frac{3a-1}{2}\le 0$

$\Rightarrow$ $a\ge -1$ 且 $a\le\frac{1}{3}$

$\therefore$ a 的可能範圍為 $-1\le a\le\frac{1}{3}$

( ) 14.在坐標平面上，設 a，b 為實數，若直線 $y=ax+b$ 通過點(0,6)與點(3,0)，則 $3a+2b=$(A)4(B)5(C)6(D)7

【097 年歷屆試題.】

解答 C

解析 $\because$ 直線 $y=ax+b$ 通過(0,6)與(3,0)兩點

$\Rightarrow \begin{cases}6=0+b\\0=3a+b\end{cases}$ $\begin{cases}b=6\\a=-2\end{cases}$

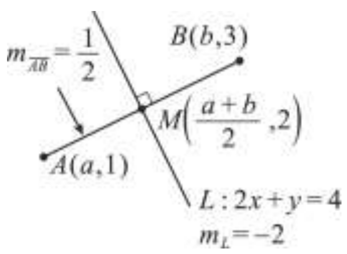
$\therefore$ $3a+2b=3\times(-2)+2\times 6=6$

( ) 15.在坐標平面上，設 a，b 為實數，若 A、B 兩點的坐標分別為$(a,1)$、$(b,3)$，且線段 $\overline{AB}$ 的垂直平分線為 $2x+y=4$，則 $2a+b=$ (A)1 (B)2 (C)-1 (D)-2

【097 年歷屆試題.】

解答 A

解析 作簡略圖形如下：



設 $A(a,1)$、$B(b,3)$的中點為 $M\left(\frac{a+b}{2},\frac{1+3}{2}\right)=\left(\frac{a+b}{2},2\right)$

(1)M 為直線 L:$2x+y=4$ 上一點

$\Rightarrow$ $2\times\left(\frac{a+b}{2}\right)+2=4$ $\Rightarrow$ $a+b=2\cdots$①

(2)又 $m_{\overline{AB}}=\frac{3-1}{b-a}$，$m_L=-2$

$\because$ $\overline{AB}\perp L$ $\Rightarrow$ $m_{\overline{AB}}\times m_L=-1$

$\Rightarrow$ $\frac{3-1}{b-a}\times(-2)=-1$ $\Rightarrow$ $a-b=-4\cdots$②

由①②解聯立得 $a=-1$，$b=3$ $\therefore$ $2a+b=2\times(-1)+3=1$

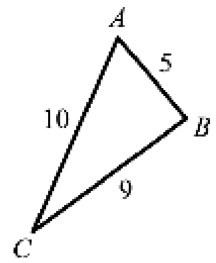
( ) 16.若△ABC 中，$\overline{AB}=5$，$\overline{BC}=9$，$\overline{CA}=10$，則 $\cos(\angle A+\angle B)=$ (A)$-\frac{13}{15}$ (B)$-\frac{7}{15}$ (C)$\frac{7}{15}$ (D)$\frac{13}{15}$

【102 年歷屆試題.】

解答 A

解析 $\because$ $\angle A+\angle B+\angle C=180°$

$\therefore$ $\cos(\angle A+\angle B)=\cos(180°-\angle C)=-\cos\angle C=-\frac{9^2+10^2-5^2}{2\times 9\times 10}=-\frac{13}{15}$



( ) 17.判斷下列各數值中，何者小於 0？
（參考公式：$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$）
(A)$\cos 100°-\sin 2011°$ (B)$\cos^2 100°-\sin^2 100°$ (C)$\cos^2 2011°-\sin^2 2011°$ (D)$\cos 100°\cos 2011°-\sin 100°\sin 2011°$

【100 年歷屆試題.】

解答 B

解析 (A)$\cos 100°=\cos(90°+10°)=-\sin 10°$

$\sin 2011°=\sin(360°\times 5+211°)=\sin 211°=\sin(180°+31°)=-\sin 31°$

$\cos 100°-\sin 2011°=-\sin 10°-(-\sin 31°)=\sin 31°-\sin 10°>0$

（$\because$ $10°<31°$ $\Rightarrow$ $\sin 10°<\sin 31°$）

(B)$\cos^2 100°-\sin^2 100°$

$=\cos(2\times 100°)=\cos 200°=\cos(180°+20°)=-\cos 20°<0$

(C)$\cos^2 2011°-\sin^2 2011°$

$=\cos(2\times 2011°)=\cos 4022°=\cos(360°\times 11+62°)=\cos 62°>0$

(D)$\cos 100°\cos 2011°-\sin 100°\sin 2011°$

$=\cos(100°+2011°)=\cos 2111°=\cos(360°\times 5+311°)=\cos 311°$

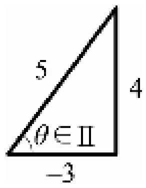
$=\cos(360°-49°)=\cos 49°>0$

( ) 18.已知 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$，$\cos\theta=-\frac{3}{5}$，則下列大小關係何者正確？ (A)$\cos\theta<\sin 2\theta<\cos 2\theta<\sin\theta$ (B)$\sin 2\theta<\cos 2\theta<\cos\theta<\sin\theta$ (C)$\sin 2\theta<\cos\theta<\cos 2\theta<\sin\theta$ (D)$\cos\theta<\cos 2\theta<\sin 2\theta<\sin\theta$

【101 年歷屆試題.】

解答 C

解析 $\because$ $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ 且 $\cos\theta=-\frac{3}{5}$ $\therefore$ $\sin\theta=\frac{4}{5}$



$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\times\frac{4}{5}\times(-\frac{3}{5}) = -\frac{24}{25}$

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2\times(-\frac{3}{5})^2 - 1 = -\frac{7}{25}$

$\because\ -\frac{24}{25} < -\frac{3}{5} < -\frac{7}{25} < \frac{4}{5}$　　$\therefore\ \sin 2\theta < \cos\theta < \cos 2\theta < \sin\theta$

(　　　) 19.設 $0 \le x \le 2\pi$，試問函數 $f(x) = \sin^2 x - 2\cos x + 2$ 之最大值為何？　(A)1　(B)2　(C)4　(D)5

【095 年歷屆試題.】

解答　C

解析　$f(x) = \sin^2 x - 2\cos x + 2 = 1 - \cos^2 x - 2\cos x + 2 = -(\cos^2 x + 2\cos x + 1) + 4$

$= -(\cos x + 1)^2 + 4$

但 $0 \le x \le 2\pi$　$\Rightarrow$　$|\cos x| \le 1$

$\therefore$　當 $\cos x = -1$ 時 $f(x)$有最大值　$-(-1+1)^2 + 4 = 4$

(　　　) 20.若 $\sin 230° = k$，則 $\tan 50° =$　(A)$-\frac{\sqrt{1-k^2}}{k}$　(B)$-\frac{k}{\sqrt{1-k^2}}$　(C)$-\sqrt{1-k^2}$　(D)$-\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}$

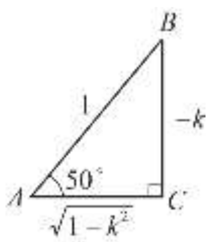
【098 年歷屆試題.】

解答　B

解析　$\sin 230° = \sin(180° + 50°) = -\sin 50° = k$

$\Rightarrow$　$\sin 50° = -k = \frac{-k}{1}$

如圖所示：



故 $\tan 50° = \frac{-k}{\sqrt{1-k^2}} = -\frac{k}{\sqrt{1-k^2}}$

(　　　) 21.設 θ、k 為實數，若 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 為方程式 $3x^2 + 2x + k = 0$ 之兩根，則 $k =$(A)$-\frac{5}{6}$　(B)$-\frac{5}{12}$　(C)$\frac{5}{6}$　(D)$\frac{5}{12}$

【095 年歷屆試題.】

解答　A

解析　$\because$　$\sin\theta$、$\cos\theta$ 為 $3x^2 + 2x + k = 0$ 之兩根

$\Rightarrow \begin{cases} \sin\theta + \cos\theta = -\frac{2}{3} \cdots ① \\ \sin\theta\cos\theta = \frac{k}{3} \cdots ② \end{cases}$

由①兩邊平方得 $\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = \frac{4}{9}$

$\Rightarrow$　$1 + 2\sin\theta\cos\theta = \frac{4}{9} \cdots ③$

②代入③得 $1 + 2\times\frac{k}{3} = \frac{4}{9}$　$\Rightarrow$　$\frac{2k}{3} = -\frac{5}{9}$

$\therefore$　$k = -\frac{5}{6}$

(　　　) 22.試問下列哪一個三角函數值與 sec250°相等？　(A) $-\csc 70°$　(B) $-\sec 110°$　(C) $-\sec 340°$　(D) $-\csc 160°$

【101 年歷屆試題.】

解答　D

解析　$\sec 250° = \sec(180° + 70°) = -\sec 70°$

(A) $-\csc 70° = -\csc(90° - 20°) = -\sec 20°$

(B) $-\sec 110° = -\sec(180° - 70°) = -(-\sec 70°) = \sec 70°$

(C) $-\sec 340° = -\sec(360° - 20°) = -\sec 20°$

(D) $-\csc 160° = -\csc(180° - 20°) = -\csc 20° = -\csc(90° - 70°) = -\sec 70°$

(　　　) 23.已知 θ 為第三象限角，且 $\tan\theta = \frac{3}{4}$，則 $\frac{2\sin\theta - 1}{3 + 4\cos\theta} =$

(A)$\frac{1}{31}$　(B)$\frac{13}{7}$　(C)11　(D)31

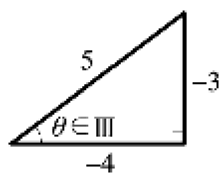
【102 年歷屆試題.】

解答　C

解析　$\because$　θ 為第三象限角且 $\tan\theta = \frac{3}{4}$　　$\therefore$　$\sin\theta = -\frac{3}{5}$，

$\cos\theta = -\frac{4}{5}$

所求 $= \frac{2\times(-\frac{3}{5}) - 1}{3 + 4\times(-\frac{4}{5})} = \frac{-\frac{11}{5}}{-\frac{1}{5}} = 11$

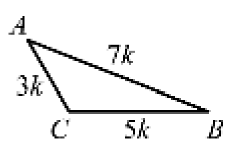


(　　　) 24.在△ABC 中，設三邊長之比 $\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CA} = 7:5:3$，則△$ABC$ 之最大內角為何？　(A)75°　(B)90°　(C)120°　(D)135°

【103 年歷屆試題.】

解答　C

解析



令 $\overline{AB} = c$，$\overline{BC} = a$，$\overline{CA} = b$

設 $a = 5k$，$b = 3k$，$c = 7k$，其中 $k > 0$

$\because$　△ABC 的邊 $\overline{AB}$ 最長　　$\therefore$　$\angle C$ 為最大內角

$\cos C=\dfrac{(5k)^2+(3k)^2-(7k)^2}{2\times 5k\times 3k}=\dfrac{-15k^2}{30k^2}=-\dfrac{1}{2}$

$\because\ \cos 120^\circ=-\dfrac{1}{2}$　　$\therefore\ \angle C=120^\circ$

故最大內角為120°

(　　　)25.設$\triangle ABC$三內角$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$的對應邊分別為a、b、c，且$\sqrt{a^2-3bc}=b-c$，求$\angle A$之值為 (A)$\dfrac{\pi}{2}$ (B)$\dfrac{2\pi}{3}$ (C)$\dfrac{3\pi}{4}$ (D)$\dfrac{5\pi}{6}$

【105 年歷屆試題.】

解答　B

解析　$\sqrt{a^2-3bc}=b-c\overset{\text{平方}}{\Rightarrow}\left(\sqrt{a^2-3bc}\right)^2=(b-c)^2$

$\Rightarrow\ a^2-3bc=b^2-2bc+c^2\Rightarrow\ b^2+c^2-a^2=-bc$

由餘弦定理：$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{-bc}{2bc}=-\dfrac{1}{2}$

$\because\ \cos 120^\circ=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ \angle A=120^\circ=\dfrac{2\pi}{3}$