0920 直線方程式 三角函數 三角函數的應用

班級　　　　　　姓名　　　　　　　　　　　座號

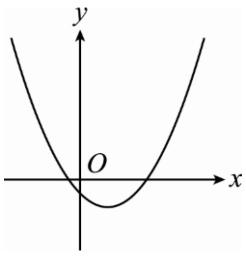
一、單選題 (25 題 每題 4 分 共 100 分)

(　　　)1.設 $a>b$，且$|a|=|b|$，則點$(a-b,a+b)$在　(A)第二象限內　(B)原點　(C)x 軸上　(D)y 軸上

【龍騰自命題.】

解答　C

(　　　)2.設 a、b、c 為實數，且二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的圖形如圖所示，則點 $P\,(b^2-4ac\,,\,abc)$在第幾象限？



(A)第一象限　(B)第二象限　(C)第三象限　(D)第四象限

【100 年歷屆試題.】

解答　A

解析　對於 $y=ax^2+bx+c$ 的圖形

開口向上　$\Rightarrow$　$a>0$

頂點在 y 軸右側　$\Rightarrow$　a、b 異號　$\Rightarrow$　$b<0$

與 y 軸的交點$(0\,,\,c)$在 y 軸的負向　$\Rightarrow$　$c<0$

與 x 軸有 2 個交點　$\Rightarrow$　$b^2-4ac>0$

因此 $abc>0$，故 $P\,(b^2-4ac\,,\,abc)$在第一象限

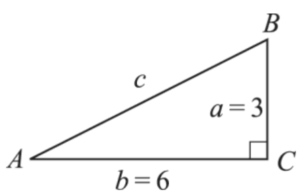
(　　　)3.求△ABC 中，設 $\angle C=90°$，$a=3$，$b=6$，求 $\sin A=$　(A)$\dfrac{1}{2}$　(B)$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　(C)$\sqrt{5}$　(D)$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

【龍騰自命題.】

解答　D

解析　如圖所示，$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{6^2+3^2}=3\sqrt{5}$

$\therefore\quad \sin A=\dfrac{a}{c}=\dfrac{3}{3\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$



(　　　)4.若 $f(x)=-8$，則 $f(0)+f(8)+f(-8)=$　(A)0　(B)16　(C)-24　(D)8

【龍騰自命題.】

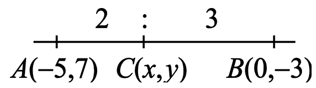
解答　C

(　　　)5.設 $A(-5\,,7)$、$B(0\,,-3)$ 為坐標平面上兩點，若點 C 在 $\overline{AB}$ 上，且 $3\overline{AC}=2\overline{BC}$，求 C 點坐標？　(A)$(3\,,3)$　(B)$(3\,,-3)$　(C)$(-3\,,-3)$　(D)$(-3\,,3)$

【隨堂測驗.】

解答　D

解析　$3\overline{AC}=2\overline{BC}$



$$\Rightarrow\begin{cases} x=\dfrac{2\times 0+3\times(-5)}{2+3}=\dfrac{-15}{5}=-3 \\ y=\dfrac{2\times(-3)+3\times 7}{2+3}=\dfrac{15}{5}=3 \end{cases}$$

$\Rightarrow\quad C(-3\,,3)$

(　　　)6.半徑為 10 的扇形區域，其面積為 5π，則此扇形之弧長為　(A)2π　(B)π　(C)$\dfrac{3}{2}\pi$　(D)$\dfrac{\pi}{2}$　【龍騰自命題.】

解答　B

解析　扇形面積$\dfrac{1}{2}r^2\theta=50\theta=5\pi$

$\theta=\dfrac{\pi}{10}$　弧長$=10\times\dfrac{\pi}{10}=\pi$

(　　　)7.α、β 均為銳角，且 $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin\beta=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，則 $\alpha+\beta=$　(A)45°　(B)60°　(C)75°　(D)105°

【龍騰自命題.】

解答　A

解析　$\because$　α、β 均為銳角，且 $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin\beta=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

$\therefore\quad \cos\alpha=\dfrac{\sqrt{20}}{5}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\beta=\dfrac{\sqrt{90}}{10}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

由和角公式得 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

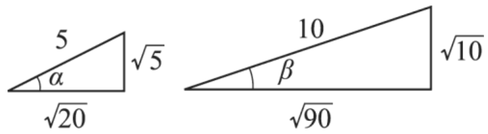
$=\dfrac{\sqrt{5}}{5}\times\dfrac{3\sqrt{10}}{10}+\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\times\dfrac{\sqrt{10}}{10}=\dfrac{5\sqrt{50}}{50}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}>0$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\times\dfrac{3\sqrt{10}}{10}-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\times\dfrac{\sqrt{10}}{10}=\dfrac{5\sqrt{50}}{50}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}>0$

$\because$　$\sin(\alpha+\beta)>0$，$\cos(\alpha+\beta)>0$　　$\therefore$　$0°<\alpha+\beta<90°$，又 $\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore$　$\alpha+\beta=45°$

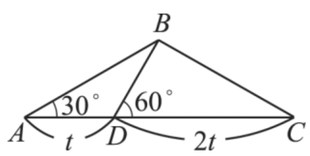


(　　　)8.在△ABC 中，若 D 點在線段 $\overline{AC}$ 上且 $\overline{AD}$ ：$\overline{DC}=1:2$，又$\angle BAD=30°$，$\angle BDC=60°$，則$\angle DCB$ 的角度為何？　(A)30°　(B)45°　(C)60°　(D)75°

【099 年歷屆試題.】

解答　A

解析



令 $\overline{AD}=t$ 、 $\overline{DC}=2t$ ，其中 $t>0$

$\because$ $\angle BDC=60°$ $\Rightarrow$ $\angle BDA=120°$ $\Rightarrow$ $\angle ABD=30°$

$\therefore$ $\triangle DAB$ 為等腰三角形 $\Rightarrow$ $\overline{DB}=t$

由餘弦定理知，在$\triangle BCD$ 中，

$\overline{BC}^2=\overline{DB}^2+\overline{DC}^2-2\overline{DB}\times\overline{DC}\times\cos(\angle BDC)$

$=t^2+(2t)^2-2\times t\times 2t\times\cos60°=3t^2$ $\Rightarrow$ $\overline{BC}=\sqrt{3}t$

由正弦定理，在$\triangle BCD$ 中

$\dfrac{\sqrt{3}t}{\sin60°}=\dfrac{t}{\sin C}$ $\Rightarrow$ $\sin C=\dfrac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $\angle C=30°$或 $150°$（不合）

故$\angle DCB=30°$

故選(A)

( ) 9.在$\triangle ABC$ 中，已知 $\overline{AB}=\sqrt{3}-1$ ， $\overline{BC}=\sqrt{2}$ ，$\angle A=30°$，則

(A) $\overline{AC}=\sqrt{2}$ (B) $\overline{AC}=1$ (C)$\angle B=45°$ (D)$\angle C=15°$

【龍騰自命題.】

解答 D

( )10.關於函數 $f(x)=ax^2+bx+c$，$ac\neq0$ 之圖形，下列敘述何者錯誤？

(A)為一拋物線 (B)與 x 軸至少有一個交點 (C)當 $b^2=4ac$ 時，與 x 軸僅有一個交點 (D)當 $b=0$，與 x 軸的交點不可能只有一個

【龍騰自命題.】

解答 B

解析 (A)$\because$ $f(x)=ax^2+bx+c$，$ac\neq0$ $\therefore$ $f(x)$為二次函數，為一拋物線

(B)$f(x)$與 x 軸可能：無交點，一個交點，或二個交點

(C)當 $b^2=4ac$ 時，頂點坐標$(\dfrac{-b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a})=(\dfrac{-b}{2a},0)$ ，恰與 x 軸交於頂點

(D)當 $b=0$ 時，頂點坐標$(\dfrac{-b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a})=(0,c)$

$\because$ $c\neq0$ $\therefore$ 與 x 軸交點不只一個

( ) 11.化簡 $\sin100°\sin(-160°)+\cos200°\cos(-280°)$得 (A)$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (B)$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (C)$\dfrac{1}{2}$ (D)$-\dfrac{1}{2}$

【龍騰自命題.】

解答 D

解析 $\sin100°\sin(-160°)+\cos200°\cos(-280°)=\sin100°\sin200°+\cos200°\cos80°$

$=\sin80°(-\sin20°)+(-\cos20°)\cos80°=-(\sin80°\sin20°+\cos20°\cos80°)$

$=-\cos(80°-20°)=-\cos60°=-\dfrac{1}{2}$

( ) 12.下列各式何者的 x 有解？ (A)$\sin x=2$ (B)$\cos x=-\dfrac{3}{2}$ (C)$\tan x=5$ (D)$\sec x=\dfrac{2}{3}$

【龍騰自命題.】

解答 C

解析 (A)$-1\le\sin x\le1$ $\therefore$ 不可能等於 2

(B)$-1\le\cos x\le1$ $\therefore$ $\cos x$ 不可能等於$-\dfrac{3}{2}$

(C)$\tan x\in\mathbb{R}$

(D)$\sec x\ge1$ 或 $\sec x\le-1$ $\therefore$ $\sec x$ 不可能等於$\dfrac{2}{3}$

( ) 13.在直角$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$\overline{AC}=12$ ，$\overline{BC}=5$ ，則 $\sin B=$ (A)$\dfrac{12}{13}$ (B)$\dfrac{5}{13}$ (C)$\dfrac{5}{12}$ (D)$\dfrac{12}{5}$

【龍騰自命題.】

解答 A

( ) 14.直線 $L:\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$（$a>0$，$b<0$）過點(3,2)，若 L 與兩坐標軸所圍成之三角形面積為 4，則 $2a-3b=$ (A)24 (B)20 (C)18 (D)16

【龍騰自命題.】

解答 D

解析 L 與兩坐標軸所圍成之三角形面積為$\dfrac{1}{2}|ab|=4$

又 $a>0$，$b<0$ $\Rightarrow$ $ab=-8\cdots$①

L 經過點$(3,2)$ $\Rightarrow$ $\dfrac{3}{a}+\dfrac{2}{b}=1$ $\Rightarrow$ $2a+3b=ab$

$\Rightarrow$ $2a+3b=-8\cdots$②

由①得：$b=-\dfrac{8}{a}\cdots$③代入②

$2a-\dfrac{24}{a}=-8$ $\Rightarrow$ $a=2$ ， -6（ -6不合）

$a=2$ 代入②得 $b=-4$ $\therefore$ $2a-3b=16$

( ) 15.設$\triangle ABC$ 之三邊長 $\overline{BC}=5$ ，$\overline{AC}=3$ ，$\overline{AB}=4$ ，若 $\angle A$ 的內角平分線與 $\overline{BC}$ 邊的交點為 D，則線段 $\overline{AD}$ 之長為 (A)$\dfrac{9\sqrt{2}}{7}$ (B)$\dfrac{10\sqrt{2}}{7}$ (C)$\dfrac{11\sqrt{2}}{7}$ (D)$\dfrac{12\sqrt{2}}{7}$

【龍騰自命題.】

解答 D

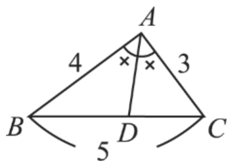
解析 $\because$ 三邊長為 3、4、5 $\therefore$ $\angle BAC=90°$ $\Rightarrow$ $\angle BAD=\angle CAD=45°$

利用$\triangle ABD$ 面積 ＋ $\triangle ACD$ 面積 ＝ $\triangle ABC$ 面積

$\Rightarrow$ $\dfrac{1}{2}\times4\times\overline{AD}\sin45°+\dfrac{1}{2}\times3\times\overline{AD}\sin45°=\dfrac{1}{2}\times4\times3\times\sin90°$

$\Rightarrow$ $\sqrt{2}\,\overline{AD}+\dfrac{3}{4}\sqrt{2}\,\overline{AD}=6$

$\Rightarrow$ $\dfrac{7}{4}\sqrt{2}\,\overline{AD}=6$ $\Rightarrow$ $\overline{AD}=\dfrac{12\sqrt{2}}{7}$



(　　　) 16.設 $0<x<\frac{\pi}{2}$，若方程式 $\tan(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{2})+\cot(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{2})=2\sqrt{2}$，則 x 的值為　(A) $\frac{5\pi}{12}$　(B) $\frac{\pi}{6}$　(C) $\frac{\pi}{3}$　(D) $\frac{\pi}{4}$

【龍騰自命題.】

解答　A

解析

$$\tan(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{2})+\cot(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{2})=\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{2})\cos(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{2})}$$

$$=\frac{2}{\sin(\frac{2}{3}\pi-x)}=2\sqrt{2}$$

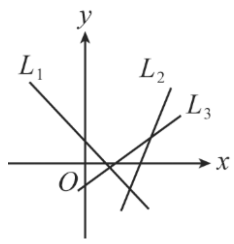
$$\Rightarrow\quad \sin(\frac{2}{3}\pi-x)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\because\quad 0<x<\frac{\pi}{2}\quad\Rightarrow\quad -\frac{\pi}{2}<-x<0$$

$$\Rightarrow\quad \frac{\pi}{6}<\frac{2}{3}\pi-x<\frac{2}{3}\pi\qquad\therefore\quad \frac{2}{3}\pi-x=\frac{\pi}{4}$$

$$x=\frac{2}{3}\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{5}{12}\pi$$

(　　　) 17.在直角坐標系中有三條直線 L_1、L_2、L_3，其斜率分別是 m_1、m_2、m_3，如圖所示，則下列何者正確？



(A) $m_1>m_2>m_3$　(B) $m_1<m_2<m_3$　(C) $m_2m_3<0$　(D) $m_1m_2<0$

【龍騰自命題.】

解答　D

解析　設 L_1、L_2、L_3 斜角分別為 θ_1、θ_2 及 θ_3

直線 L 斜角為 θ，則斜率 $m=\tan\theta$

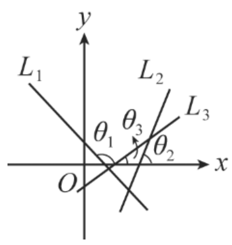
當 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ 時：$\tan\theta>0$，當 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ 時：$\tan\theta<0$

如圖所示：$0<\theta_3<\theta_2<\frac{\pi}{2}\quad\Rightarrow\quad 0<\tan\theta_3<\tan\theta_2$

$\Rightarrow\quad 0<m_3<m_2$

又 $\frac{\pi}{2}<\theta_1<\pi\quad\Rightarrow\quad \tan\theta_1<0\quad\Rightarrow\quad m_1<0$

$\therefore\quad m_1<m_3<m_2$，且 $m_2m_3>0$，$m_1m_2<0$



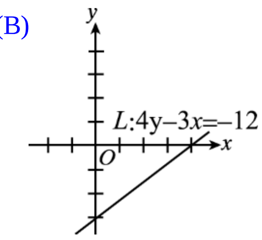
(　　　) 18.設直線 $L:4y-3x=-12$，則下列何者正確？　(A) L 之斜率為 $\frac{4}{3}$　(B) L 不經過第四象限　(C)過點 $(3,-2)$，且與 L 平行之直線方程式為 $3x+4y=1$　(D)過點 $(-1,2)$，且與 L 垂直之直線方程式為 $4x+3y=2$

【龍騰自命題.】

解答　D

解析　(A) $L:4y-3x=-12\quad\Rightarrow\quad y=\frac{3}{4}x-3\qquad\therefore$　斜率為 $\frac{3}{4}$

(B)



$\therefore$　不經過第二象限

(C)與 L 平行之直線設為 $4y-3x=k$

又過 $(3,-2)\quad\Rightarrow\quad k=-8-9=-17\qquad\therefore$　直線為 $4y-3x=-17$

(D)與 L 垂直之直線設為 $4x+3y=\ell$

又過 $(-1,2)\quad\Rightarrow\quad \ell=-4+6=2\qquad\therefore$　直線為 $4x+3y=2$

(　　　) 19.不論 a 為任何實數，直線 $(2+a)x+(1+4a)y+3-2a=0$ 恆過下列哪一定點？　(A) $(1,2)$　(B) $(-2,1)$　(C) $(2,0)$　(D) $(1,1)$

【龍騰自命題.】

解答　B

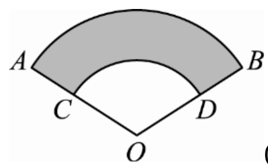
解析　$(2+a)x+(1+4a)y+3-2a=0\quad\Rightarrow\quad(2x+y+3)+a(x+4y-2)=0$

$$\Rightarrow\quad\begin{cases}2x+y+3=0\cdots①\\x+4y-2=0\cdots②\end{cases}\qquad ②\times2-①\text{得 }7y-7=0\quad\Rightarrow\quad y=1$$

代入②

得 $x=-2\qquad\therefore$　必過點 $(-2,1)$

(　　　) 20.如圖，$\overline{OA}=5$，$\overline{OC}=3$ 且 $\overset{\frown}{CD}=6$，則鋪色部分的面積為



(A) 8　(B) 12　(C) 16　(D) 20

【隨堂講義補充題.】

解答　C

解析　令 $\angle AOB=\theta$

$\overset{\frown}{CD}=6\quad\Rightarrow\quad 3\theta=6\quad\Rightarrow\quad\theta=2$

所求 $=\frac{1}{2}\times5^2\times2-\frac{1}{2}\times3^2\times2=16$

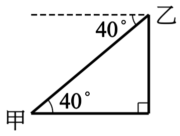
(　　　) 21.已知甲站在地面上，乙站在山丘上，若由甲站立之處看乙之仰角為 $40°$，則由乙站立之處看甲之俯角為　(A) $50°$　(B) $40°$

(C) $90°$　(D)無法判斷

【隨堂測驗.】

解答　B

解析



$\because$　內錯角相等

(　　　) 22.$\triangle ABC$ 中，若 $\overline{AB}=1$，$\overline{AC}=2$，$\angle A=120°$，則$\triangle ABC$ 面積 $=$

(A) $\frac{1}{2}$　(B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$　(C) 1　(D) $\sqrt{3}$

【龍騰自命題.】

解答　B

(　　　) 23.$\sin 165°=$ (A) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ (C) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$　(D) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

【龍騰自命題.】

解答　D

(　　　) 24.$\triangle ABC$ 中，若 $\overline{AB}=4$，$\overline{BC}=2$，$\overline{AC}=2\sqrt{3}$，則 $\angle B=$　(A) $15°$　(B) $30°$　(C) $60°$　(D) $75°$

【龍騰自命題.】

解答　C

解析　$\cos B=\frac{4^2+2^2-(2\sqrt{3})^2}{2\times 4\times 2}=\frac{8}{2\times 4\times 2}=\frac{1}{2}$　$\therefore$　$\angle B=60°$

(　　　) 25.設 a 、 b 為整數，若 $\sin 75°+\sin 195°=a+b\sqrt{2}$ ，則數對 $(a,b)=$　(A) $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$　(B) $\left(-\frac{1}{2},0\right)$　(C) $\left(0,\frac{1}{2}\right)$　(D) $\left(\frac{1}{2},0\right)$ 【隨堂講義補充題.】

解答　C

解析　$a+b\sqrt{2}$

$=\sin 75°+\sin 195°$

$=\sin(30°+45°)+\sin(60°+135°)$

$=\sin 30°\cos 45°+\cos 30°\sin 45°+\sin 60°\cos 135°$

$+\cos 60°\sin 135°$

$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow$　$(a,b)=\left(0,\frac{1}{2}\right)$