三角函數的應用 0916　班級　　　姓名　　　　　　座號

一、單選題 (25 題 每題 4 分 共 100 分)

(　　) 1.試求 cos155°cos65° + sin155°sin65°之值為　(A) − 1　(B)0　(C)$\frac{1}{2}$　(D)1

【課本練習題-自我評量.】

解答　B

解析　設 $\alpha = 155°$，$\beta = 65°$，則

原式 $= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos(155° - 65°) = \cos 90° = 0$

(　　) 2.已知四邊形 $ABCD$（按順序）中，$\overline{AB} = 8$，$\overline{BC} = 5$，$\overline{AD} = 3$，且 $\angle ABC = \angle ADC = 60°$，則 $\overline{CD}$ 之長為多少？　(A)5　(B)6　(C)7　(D)8

【098 年歷屆試題數(C).】

解答　D

解析　設 $\overline{CD} = x$　（$x > 0$）

在△ABC 中，$\overline{AC}^2 = 8^2 + 5^2 - 2\times 8\times 5\times\cos 60° = 49$……①

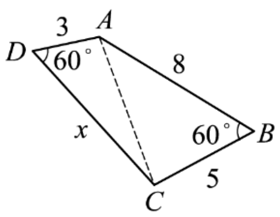
在△ADC 中，$\overline{AC}^2 = 3^2 + x^2 - 2\times 3\times x\times\cos 60° = x^2 - 3x + 9$……②

由①和②知

$x^2 - 3x + 9 = 49$　⇒　$x^2 - 3x - 40 = 0$　⇒　$(x-8)(x+5) = 0$

⇒　$x = 8$ 或 -5（不合）

故 $\overline{CD} = 8$

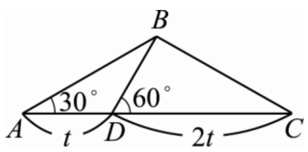


(　　) 3.在△ABC 中，若 D 點在線段 $\overline{AC}$ 上且 $\overline{AD}$: $\overline{DC} = 1 : 2$，又 $\angle BAD = 30°$，$\angle BDC = 60°$，則 $\angle DCB$ 的角度為何？　(A)30°　(B)45°　(C)60°　(D)75°

【099 年歷屆試題數(C).】

解答　A

解析



令 $\overline{AD} = t$、$\overline{DC} = 2t$，其中 $t > 0$

∵　$\angle BDC = 60°$　⇒　$\angle BDA = 120°$　⇒　$\angle ABD = 30°$

∴　△DAB 為等腰三角形　⇒　$\overline{DB} = t$

由餘弦定理知，在△BCD 中，

$\overline{BC}^2 = \overline{DB}^2 + \overline{DC}^2 - 2\overline{DB}\times\overline{DC}\times\cos(\angle BDC)$

$= t^2 + (2t)^2 - 2\times t\times 2t\times\cos 60° = 3t^2$　⇒　$\overline{BC} = \sqrt{3}t$

由正弦定理，在△BCD 中 $\frac{\sqrt{3}t}{\sin 60°} = \frac{t}{\sin C}$

⇒　$\sin C = \frac{1}{2}$　⇒　$\angle C = 30°$或 $150°$（不合）

故 $\angle DCB = 30°$

(　　) 4.△ABC 中，$\overline{AB} = 10$，$\angle C = 30°$，則△ABC 的外接圓半徑為　(A)5　(B)10　(C)15　(D)20　(E)40

【龍騰自命題.】

解答　B

解析 利用正弦定理 $\dfrac{\overline{AB}}{\sin 30°}=2R \Rightarrow \dfrac{10}{\frac{1}{2}}=2R$　∴ $R=10$

(　　) 5.若 $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\alpha$ 為第二象限角，$\cot\beta=-1$，β 為第四象限角，則 $\cos(\alpha-\beta)$之值為　(A)0　(B)1　(C)-1　(D)$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

【龍騰自命題.】

解答 C

解析 ∵ α 為第二象限角，且 $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

∴ $\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　∵ β 為第四象限角，且 $\cot\beta=-1$

∴ $\sin\beta=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\cos\beta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

∴ $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times(-\dfrac{1}{\sqrt{2}})$

$=(-\dfrac{1}{2})+(-\dfrac{1}{2})=-1$

(　　) 6.設 $f(x)=3\sin x+4\cos x$，則 $f(x)$ 的最大值為　(A) 3　(B) 4　(C) 5　(D) 7

【隨堂講義補充題.】

解答 C

解析 $f(x)=3\sin x+4\cos x=5\left(\dfrac{3}{5}\sin x+\dfrac{4}{5}\cos x\right)$

$=5(\cos\alpha\sin x+\sin\alpha\cos x)=5\sin(x+\alpha)$

其中 $\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$

又 $-1\le\sin(x+\alpha)\le 1$

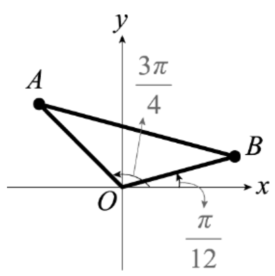
∴ $f(x)$ 的最大值為 5

(　　) 7.已知平面上兩點 $A(\cos\dfrac{3\pi}{4},\sin\dfrac{3\pi}{4})$、$B(\cos\dfrac{\pi}{12},\sin\dfrac{\pi}{12})$，求線段 $\overline{AB}$ 之長。　(A)1　(B)$\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$　(C)$\sqrt{2}$　(D)$\sqrt{3}$

【102 年歷屆試題數(B).】

解答 D

解析 如圖所示：



$\overline{OA}=\sqrt{\cos^2\dfrac{3\pi}{4}+\sin^2\dfrac{3\pi}{4}}=1$，$\overline{OB}=\sqrt{\cos^2\dfrac{\pi}{12}+\sin^2\dfrac{\pi}{12}}=1$

$\angle AOB=\dfrac{3\pi}{4}-\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{2\pi}{3}$

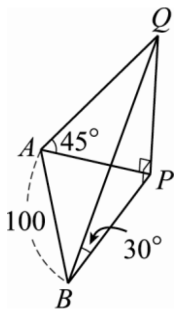
由餘弦定理：$\overline{AB}^2=1^2+1^2-2\times1\times1\times\cos\dfrac{2\pi}{3}=3$

得 $\overline{AB}=\sqrt{3}$

(　　)8.自一塔頂測得地面正西 A 點俯角為 45°、正南 B 點俯角為 30°，$\overline{AB}=100$ 公尺，則塔高為　(A)50 公尺　(B)60 公尺　(C)70 公尺　(D)80 公尺

解答 A

解析 如圖所示：



設塔高 $\overline{PQ}=h$ 公尺

直角△APQ 中，$\overline{PA}=h\cot 45°=h$；直角△$BPQ$ 中，$\overline{PB}=h\cot 30°=\sqrt{3}h$；

直角△APB 中，$\angle APB=90°$

所以 $100^2=h^2+(\sqrt{3}h)^2$，得 $4h^2=100^2$，故 $h=50$（公尺）

(　　) 9.若 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$，α 在第四象限內，$\sin\beta=\frac{12}{13}$，β 在第二象限內，則 $\tan(\alpha+\beta)$ 之值為 (A)$\frac{33}{56}$ (B)$-\frac{33}{56}$ (C)$-\frac{56}{33}$ (D)$\frac{56}{33}$

【龍騰自命題.】

解答 D

解析 $\frac{3}{2}\pi<\alpha<2\pi$，$\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$

$\cos\alpha=\frac{3}{5}$，$\sin\beta=\frac{12}{13}$，$\sin\alpha=-\sqrt{1-(\frac{3}{5})^2}=-\frac{4}{5}$ $\therefore$ $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{4}{3}$

$\cos\beta=-\sqrt{1-(\frac{12}{13})^2}=-\frac{5}{13}$ $\therefore$ $\tan\beta=\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=-\frac{12}{5}$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{-\frac{4}{3}-\frac{12}{5}}{1-(-\frac{4}{3})(-\frac{12}{5})}=\frac{56}{33}$$

(　　) 10.在△ABC 中，$\overline{AB}=10$，$\overline{BC}=20$，$\angle B=150°$，則△ABC 的面積為 (A)30 (B)40 (C)50 (D)60

【隨堂講義補充題.】

解答 C

解析 △ABC的面積 $=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\sin B=\frac{1}{2}\times10\times20\times\sin150°=50$

(　　) 11.△ABC 中，已知 $a=20$，$b=30$，$\angle A=100°$，則此三角形為 (A)不存在 (B)直角三角形 (C)等腰三角形 (D)等腰直角三角形

【龍騰自命題.】

解答 A

解析 依據正弦定理 $\frac{20}{\sin100°}=\frac{30}{\sin B}$，則 $\sin B$ 應該要大於 $\sin100°$，即 $\angle A+\angle B$ 超過 $180°$

$\therefore$ △ABC 不存在

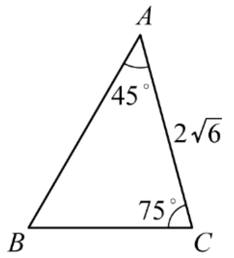
(　　)12.在△ABC 中，$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的對應邊分別為 a，b，c，若 $b=2\sqrt{6}$，$\angle A=45°$，$\angle C=75°$，則△ABC 的面積等於 (A)$6-2\sqrt{3}$ (B)$3+\sqrt{3}$ (C)$6+\sqrt{3}$ (D)$6+2\sqrt{3}$

【龍騰自命題.】

解答 D

解析 $\angle B=60°$，$\frac{2\sqrt{6}}{\sin60°}=\frac{\overline{BC}}{\sin45°}$ $\Rightarrow$ $\frac{2\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\overline{BC}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ $\Rightarrow$ $\overline{BC}=4$

$\therefore$ △ABC 面積 $=\frac{1}{2}\times4\times2\sqrt{6}\times\sin75°=\frac{1}{2}\times4\times2\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=6+2\sqrt{3}$



(　　　) 13.梯形 $ABCD$，$\overline{AD} /\!/ \overline{BC}$，已知 $\overline{AD}=4$，$\overline{BC}=10$，$\overline{AB}=5$，$\overline{CD}=7$，則梯形 $ABCD$ 面積為　(A)26　(B)$12\sqrt{6}$　(C)24　(D)$14\sqrt{6}$　(E)36

【龍騰自命題.】

解答　D

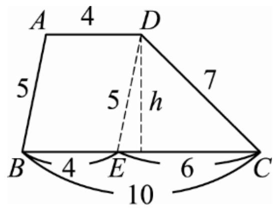
解析　過 D 作 $\overline{DE} /\!/ \overline{AB}$

$\therefore\quad \overline{CE}=10-4=6$

$\triangle CDE$ 的面積 $=\sqrt{9(9-5)(9-6)(9-7)}=\sqrt{9\times4\times3\times2}=6\sqrt{6}$

$\triangle CDE$ 的高 $h=\dfrac{6\sqrt{6}\times2}{6}=2\sqrt{6}$

梯形 $ABCD$ 的面積 $=\dfrac{(4+10)\times2\sqrt{6}}{2}=14\sqrt{6}$



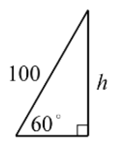
(　　　) 14.小杰放風箏，放出100公尺的線，而風箏的仰角為 $60°$，則風箏的高度為多少公尺？　(A)100　(B)$100\sqrt{3}$　(C)50　(D)$50\sqrt{3}$

【隨堂講義補充題.】

解答　D

解析　設風箏高度為 h 公尺

$\sin60°=\dfrac{h}{100}\qquad\therefore\quad h=50\sqrt{3}$

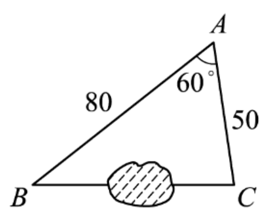


(　　　) 15.地面上有二點 B，C 被一水池隔開，梁小聖在地面上找一點 A，量得 $\overline{AB}=80$ 公尺，$\overline{AC}=50$ 公尺，並測得 $\angle CAB=60°$，求 $\overline{BC}$ 長為　(A)50 公尺　(B)60 公尺　(C)70 公尺　(D)80 公尺

【龍騰自命題.】

解答　C

解析　由餘弦定理：



$\overline{BC}^2=80^2+50^2-2\times80\times50\times\cos60°=6400+2500-4000=4900$

$\therefore\quad \overline{BC}=\sqrt{4900}=70$（公尺）

(　　　) 16. $\cos\dfrac{\pi}{7}\cos\dfrac{2}{7}\pi\cos\dfrac{4}{7}\pi$ 的值為　(A)$\dfrac{1}{2}$　(B)$-\dfrac{1}{3}$　(C)$\dfrac{1}{8}$　(D)$-\dfrac{1}{8}$

【龍騰自命題.】

解答　D

解析 原式$=\dfrac{8\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}}=\dfrac{4\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}}$

$$=\frac{2\sin\frac{4\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{\sin\frac{8\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{-\sin\frac{\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}}=-\frac{1}{8}$$

( ) 17.設 $0°<\theta<90°$、$\cos\theta=\frac{3}{5}$，則 $\sin2\theta+\cos2\theta=$ (A)$\frac{13}{25}$ (B)$\frac{17}{25}$ (C)$\frac{19}{25}$ (D)$\frac{21}{25}$

【龍騰自命題.】

解答 B

解析 $\because$ $\sin\theta=\frac{4}{5}$，$\cos\theta=\frac{3}{5}$

$\therefore$ $\sin2\theta+\cos2\theta=(2\sin\theta\cos\theta)+(2\cos^2\theta-1)$

$$=2\times\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}+2\times(\frac{3}{5})^2-1=\frac{24}{25}+\frac{18}{25}-1=\frac{17}{25}$$

( ) 18.三角形的三邊長為 5，7，9，設其最大內角為 θ，則 $\cos\theta$ 值為 (A)$\frac{11}{12}$ (B)$\frac{5}{6}$ (C)$-\frac{1}{10}$ (D)$\frac{19}{36}$

【龍騰自命題.】

解答 C

解析 $\because$ $9^2=5^2+7^2-2\cdot5\cdot7\cdot\cos\theta$

$\therefore$ $81=25+49-70\cos\theta$

$\Rightarrow$ $\cos\theta=\frac{-7}{70}=-\frac{1}{10}$

( ) 19.$\triangle ABC$ 中，$\angle A=30°$，$\angle C=90°$，$\overline{AB}=12$，$\triangle ABC$ 面積 = (A)12 平方單位 (B)$12\sqrt{3}$ 平方單位 (C)18 平方單位 (D)$18\sqrt{3}$ 平方單位

【龍騰自命題.】

解答 D

解析 $\triangle ABC$ 為直角三角形

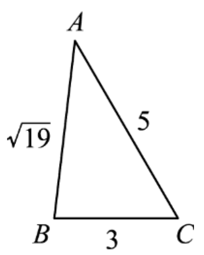
$\Rightarrow$ $\triangle ABC$ 面積$=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BC}=\frac{1}{2}\times6\sqrt{3}\times6=18\sqrt{3}$

( ) 20.$\triangle ABC$ 中，若 $a=3$，$b=5$，$c=\sqrt{19}$，則 $\angle C=$ (A)$\frac{\pi}{6}$ (B)$\frac{\pi}{3}$ (C)$\frac{2\pi}{3}$ (D)$\frac{4\pi}{3}$

【龍騰自命題.】

解答 B

解析 $\cos C=\frac{3^2+5^2-(\sqrt{19})^2}{2\times3\times5}=\frac{1}{2}$ $\therefore$ $\angle C=60°$



( ) 21.三角形的三邊長為 3，5，6，則此三角形為 (A)銳角三角形 (B)直角三角形 (C)鈍角三角形 (D)等腰三角形

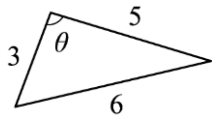
【龍騰自命題.】

解答 C

解析 $\cos\theta=\frac{3^2+5^2-6^2}{2\times3\times5}=-\frac{1}{15}$

$\therefore \quad \theta > 90°$

故為鈍角三角形



(　　　) 22.已知一矩形的長為 $2\cos 1° \cos 2°$，寬為 $2\sin 1° \csc 4°$，則此矩形面積為何？　(A)1　(B)2　(C)3　(D)4

【103 年歷屆試題數(B).】

解答　A

解析　$2\cos 1° \cos 2° \times 2\sin 1° \csc 4° = 2\sin 1° \cos 1° \times 2\cos 2° \times \dfrac{1}{\sin 4°}$

$$= \sin 2° \times 2\cos 2° \times \frac{1}{\sin 4°} = \sin 4° \times \frac{1}{\sin 4°} = 1$$

(　　　) 23.$\triangle ABC$ 三邊長 $a = 2\sqrt{2} + 1$，$b = 3 + \sqrt{2}$，$c = 1$，則$\triangle ABC$ 的最大角為　(A)60°　(B)75°　(C)120°　(D)150°

【龍騰自命題.】

解答　C

解析　$\because \quad b > a > c \qquad \therefore \quad \angle B > \angle A > \angle C$

由餘弦定理：

$$\cos B = \frac{(2\sqrt{2}+1)^2 + 1^2 - (3+\sqrt{2})^2}{2 \times (2\sqrt{2}+1) \times 1} = \frac{8 + 4\sqrt{2} + 1 + 1 - 9 - 6\sqrt{2} - 2}{2(2\sqrt{2}+1)}$$

$$= \frac{-(2\sqrt{2}+1)}{2(2\sqrt{2}+1)} = -\frac{1}{2} \qquad \therefore \quad \angle B = 120°$$

(　　　) 24.三角形的三邊長為 4、5、6，若其最大內角為 θ，則 $\cos\theta =$　(A)$\dfrac{1}{4}$　(B)$\dfrac{1}{5}$　(C)$\dfrac{1}{6}$　(D)$\dfrac{1}{8}$

【龍騰自命題.】

解答　D

解析　$\cos\theta = \dfrac{4^2 + 5^2 - 6^2}{2 \times 4 \times 5} = \dfrac{5}{2 \times 4 \times 5} = \dfrac{1}{8}$

(　　　) 25.$\triangle ABC$ 中，$a = 2\sqrt{2}$，$b = 2\sqrt{3}$，$\angle A = 45°$，若$\angle B$ 為銳角，則$\angle B =$　(A)30°　(B)45°　(C)60°　(D)75°

【龍騰自命題.】

解答　C

解析　$\dfrac{2\sqrt{2}}{\sin 45°} = \dfrac{2\sqrt{3}}{\sin B} \quad \Rightarrow \quad \sin B = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \qquad \therefore \quad \angle B = 60°$或 $120°$

已知$\angle B$ 為銳角　$\therefore \quad \angle B = 60°$