三角函數的應用 0915 班級　　　　姓名　　　　座號

一、單選題 (25 題 每題 4 分 共 100 分)

(　　) 1.在△ABC 中，已知 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 之對應邊長分別為 a、b、c，若 $\angle B=120°$，$a=6$，則下列選項何者正確？ (A)$0<b-c<3$ (B)$3<b-c<6$ (C)$6<b-c<9$ (D)$9<b-c<12$

【096 年歷屆試題.】

解答　B

解析　由餘弦定理知

$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B=c^2+6^2-2\times c\times 6\times\cos120°=(c+3)^2+27$

$\Rightarrow\ b^2-(c+3)^2=27\ \Rightarrow\ (b+c+3)(b-c-3)=27$

但 $b+c+3>0$，故得 $b-c-3>0$

即 $b-c>3$

又 $b-c<a\ \Rightarrow\ b-c<6$

$\therefore\ 3<b-c<6$

(　　) 2.求$\left(\sin75°+\cos75°\right)^2=$ (A)$\frac{3}{2}$ (B)$\frac{1}{2}$ (C)$\frac{5}{3}$ (D)$\frac{4}{3}$【隨堂講義補充題.】

解答　A

解析　$\left(\sin75°+\cos75°\right)^2=\sin^2 75°+\cos^2 75°+2\sin75°\cos75°$

$=1+\sin150°=1+\sin\left(180°-30°\right)=1+\sin30°=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

(　　) 3.設三角形的三邊為 a、b、c，其對角依次為 A、B、C，若$(a-2b+c)^2+(3a+b-2c)^2=0$，則 (A)$a:b:c=5:3:7$ (B)$\sin A:\sin B:\sin C=3:5:7$ (C)$\cos A=\frac{3}{14}$ (D)$\sin A=\frac{\sqrt{3}}{14}$

【龍騰自命題.】

解答　B

(　　) 4.△ABC 中，$\angle A=120°$，$a=10\sqrt{3}$，$b=10\sqrt{2}$，則$\angle B=$ (A)$30°$ (B)$45°$ (C)$60°$ (D)$75°$

【隨堂講義補充題.】

解答　B

解析　由正弦定理：

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}\ \Rightarrow\ \frac{10\sqrt{3}}{\sin120°}=\frac{10\sqrt{2}}{\sin B}$（$\sin120°=\frac{\sqrt{3}}{2}$）

$\Rightarrow\ \sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 得知 $\angle B=45°$ 或$135°$（不合，內角和需$<180°$）

(　　) 5.在△ABC 中，已知 $\overline{AB}=\sqrt{3}-1$，$\overline{BC}=\sqrt{2}$，$\angle A=30°$，則 (A)$\overline{AC}=\sqrt{2}$ (B)$\overline{AC}=1$ (C)$\angle B=45°$ (D)$\angle C=15°$

【龍騰自命題.】

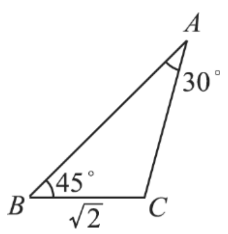
解答　D

(　　) 6.在△ABC 中，$\angle A=30°$，$\angle B=45°$，其對邊分別為 a、b，而 $a=\sqrt{2}$，則 $b=$ (A)3 (B)$\sqrt{3}$ (C)2 (D)$\sqrt{2}$

【龍騰自命題.】

解答　C

解析　$\frac{\sqrt{2}}{\sin30°}=\frac{b}{\sin45°}\ \Rightarrow\ b=2$



(　　　) 7.設$\alpha+\beta=\dfrac{3\pi}{4}$，則$(1-\tan\alpha)(1-\tan\beta)=$　(A)1　(B)2　(C)-1　(D)-2

【龍騰自命題.】

解答　B

解析　$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\tan(\dfrac{3}{4}\pi)=-1$

$\Rightarrow\ \tan\alpha+\tan\beta=-1+\tan\alpha\tan\beta$

故$(1-\tan\alpha)(1-\tan\beta)=1-(\tan\alpha+\tan\beta)+\tan\alpha\tan\beta$

$=1-(-1+\tan\alpha\tan\beta)+\tan\alpha\tan\beta=2$

(　　　) 8.$\triangle ABC$中，a、b、c為三邊長且$a^2-(b-c)^2=(2+\sqrt{3})bc$，則$\angle A=$　(A)90°　(B)120°　(C)135°　(D)150°

【隨堂講義補充題.】

解答　D

解析　已知$a^2-(b-c)^2=(2+\sqrt{3})bc$

$\Rightarrow\ a^2-b^2+2bc-c^2=(2+\sqrt{3})bc$

$\Rightarrow\ b^2+c^2-a^2=-\sqrt{3}bc$（均為邊長利用餘弦定理）

故由餘弦定理：

$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{-\sqrt{3}bc}{2bc}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore\ \angle A=150^\circ$

(　　　) 9.求$\tan25^\circ\tan20^\circ+\tan20^\circ+\tan25^\circ=$　(A)0　(B)2　(C)1　(D)$\sqrt{3}$

【龍騰自命題.】

解答　C

(　　　) 10.$\triangle ABC$中，已知$\overline{AC}=2\sqrt{3}$，$\overline{AB}=6$，$\angle C=120^\circ$，則$\triangle ABC$面積為　(A)$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(B)$\sqrt{3}$　(C)$2\sqrt{3}$　(D)$3\sqrt{3}$

【隨堂講義補充題.】

解答　D

解析　設$\overline{BC}=x$，由餘弦定理：

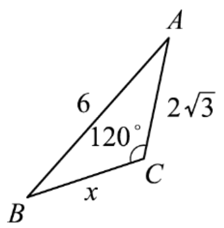
$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2-2\times\overline{AC}\times\overline{BC}\times\cos C$

$\Rightarrow\ 6^2=(2\sqrt{3})^2+x^2-2\times2\sqrt{3}\times x\times\cos120^\circ$

$\Rightarrow\ x^2+2\sqrt{3}x-24=0$

$\Rightarrow\ x=2\sqrt{3}$或$-4\sqrt{3}$（不合）

則$\triangle ABC$面積$=\dfrac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AC}\times\sin C=\dfrac{1}{2}\times(2\sqrt{3})(2\sqrt{3})\times\sin120^\circ=3\sqrt{3}$



(　　　) 11.在$\triangle ABC$中，a、b、c分別表示三邊長，若$(b+c)$：$(c+a)$：$(a+b)=5$：6：7，則$\sin A$：$\sin B$：$\sin C=$　(A)5：6：7　(B)3：2：1　(C)6：5：4　(D)4：3：2

【龍騰自命題.】

解答　D

解析　$(b+c):(c+a):(a+b)=5:6:7$

令$\begin{cases} b+c=5k\cdots① \\ c+a=6k\cdots② \\ a+b=7k\cdots③ \end{cases} \xrightarrow{\frac{①+②+③}{2}} \Rightarrow\ a+b+c=9k$

$\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c=(9k-5k):(9k-6k):(9k-7k)=4:3:2$

(　　) 12.化簡 $\sin100°\sin(-160°)+\cos200°\cos(-280°)$得 (A)$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B)$-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C)$\frac{1}{2}$ (D)$-\frac{1}{2}$

【龍騰自命題.】

解答 D

解析 $\sin100°\sin(-160°)+\cos200°\cos(-280°)=\sin100°\sin200°+\cos200°\cos80°$

$=\sin80°(-\sin20°)+(-\cos20°)\cos80°=-(\sin80°\sin20°+\cos20°\cos80°)$

$=-\cos(80°-20°)=-\cos60°=-\frac{1}{2}$

(　　) 13.已知三角形三邊長$\overline{AB}=7$，$\overline{BC}=8$，$\overline{AC}=9$，則$\overline{BC}$邊上的高長度為何？ (A)$3\sqrt{5}$ (B)$4\sqrt{5}$ (C)$\frac{8\sqrt{5}}{3}$ (D)$\frac{7\sqrt{5}}{3}$

【隨堂講義補充題.】

解答 A

解析 $\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\frac{1}{2}\times底\times高$

由題意知：$s=\frac{7+8+9}{2}=12$

則$\Delta=\sqrt{12(12-7)(12-8)(12-9)}=12\sqrt{5}=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times高$

$\Rightarrow\ 12\sqrt{5}=\frac{1}{2}\times8\times高$　得$高=3\sqrt{5}$

(　　) 14.$\triangle ABC$中，$\overline{AB}=6$，$\overline{AC}=9$，$\angle A=120°$，$\angle A$之角平分線交$\overline{BC}$於D，則$\overline{AD}=$ (A)$\frac{12}{5}$ (B)$\frac{18}{5}$ (C)$\frac{10}{3}$ (D)$\frac{14}{3}$

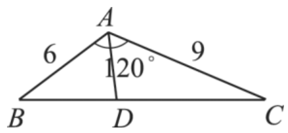
【龍騰自命題.】

解答 B

解析 利用面積$\triangle ABD+\triangle ACD=\triangle ABC$

$\Rightarrow\ \frac{1}{2}\times6\times\overline{AD}\sin60°+\frac{1}{2}\times9\times\overline{AD}\sin60°=\frac{1}{2}\times6\times9\times\sin120°$

$\Rightarrow\ 15\overline{AD}=54\ \Rightarrow\ \overline{AD}=\frac{18}{5}$



(　　) 15.$\triangle ABC$中，$\angle B=105°$，$\angle C=60°$，$a=\sqrt{3}-1$，下列何者為真？ (A)$c=\sqrt{3}$ (B)$c=2\sqrt{2}$ (C)$b=\sqrt{2}+1$ (D)$b=\sqrt{3}+1$

【隨堂講義補充題.】

解答 D

解析 ∵ 已知二角與一邊利用正弦定理

$\angle A=180°-105°-60°=15°$

$\frac{\sqrt{3}-1}{\sin15°}=\frac{b}{\sin105°}=\frac{c}{\sin60°}$（$\sin15°=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，$\sin105°=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$）

∴ $b=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\times\frac{\sqrt{3}-1}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}=\sqrt{3}+1$

$$c=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{4\left(\sqrt{3}-1\right)}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\sqrt{6}$$

(　　　) 16.$\triangle ABC$ 中，$a=6$，$c=7$，$\angle B=60^\circ$，則 $\cos A=$　(A)$\frac{\sqrt{43}}{43}$　(B)$\frac{4\sqrt{43}}{43}$　(C)$\frac{7\sqrt{43}}{43}$　(D)$\frac{10\sqrt{43}}{43}$

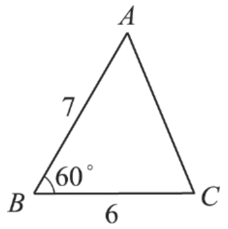
【龍騰自命題.】

解答　B

解析　$\overline{AC}^2=6^2+7^2-2\times6\times7\times\cos60^\circ=36+49-42=43$

$\therefore\ \overline{AC}=\sqrt{43}$

$$\cos A=\frac{\overline{AC}^2+7^2-6^2}{2\times\overline{AC}\times7}=\frac{43+49-36}{2\times\sqrt{43}\times7}=\frac{4}{\sqrt{43}}=\frac{4\sqrt{43}}{43}$$



(　　　) 17.若 $\cos\theta=\frac{1}{3}$ 且 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$，則 $3\sin\frac{\theta}{4}\cos\frac{\theta}{4}\cos\frac{\theta}{2}$ 的值為　(A)$\frac{1}{2}$　(B)$\frac{\sqrt{2}}{2}$　(C)$\frac{\sqrt{3}}{2}$　(D)1

【龍騰自命題.】

解答　B

解析　原式$=\frac{3}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=\frac{3}{4}\sin\theta=\frac{3}{4}\sqrt{1-(\frac{1}{3})^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

(　　　) 18.α 、 β 均為銳角，$\cos\alpha=\frac{4}{5}$ ，$\tan\beta=\frac{5}{12}$ ，試求 $\sin(\alpha+\beta)$ 之值為　(A)$\frac{56}{65}$　(B)$\frac{65}{56}$　(C)$\frac{63}{65}$　(D)$\frac{65}{63}$

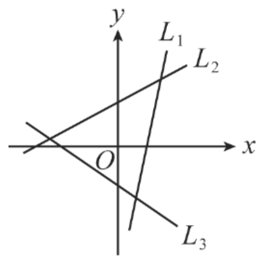
【隨堂測驗.】

解答　A

解析　$\sin\left(\alpha+\beta\right)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{3}{5}\times\frac{12}{13}+\frac{4}{5}\times\frac{5}{13}$

$$=\frac{36}{65}+\frac{20}{65}=\frac{56}{65}$$

(　　　) 19.如圖三直線 L_1、L_2、L_3 之斜角分別是 α_1、α_2、α_3，斜率分別是 m_1、m_2、m_3，則下列何者為真？



(A)$\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3$　(B)$m_1<m_2<m_3$　(C)$m_3<m_2<m_1$　(D)$m_3<m_1<m_2$

【龍騰自命題.】

解答　C

解析　$\because\ \alpha_2<\alpha_1<\frac{\pi}{2}<\alpha_3$　　$\therefore\ m_3<m_2<m_1$

(　　　) 20.在$\triangle ABC$ 中，若 $\sin A:\sin B:\sin C=7:8:13$，則 $\angle C=$　(A)30°　(B)60°　(C)120°　(D)150°

【隨堂測驗.】

解答　C

解析　$\because\ \sin A:\sin B:\sin C=7:8:13=a:b:c$

$$\therefore\ \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{7^2+8^2-13^2}{2\times7\times8}=-\frac{1}{2}$$

故 $\angle C=120^\circ$

(　　　) 21.在△ABC 中，已知 $a=10$、$\angle B=95^\circ$、$\angle C=40^\circ$，求△ABC 之外接圓面積為　(A)$10\sqrt{2}\pi$　(B)50π　(C)$5\sqrt{2}\pi$　(D)25π

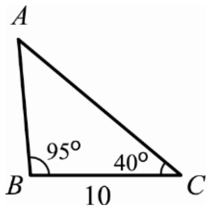
【隨堂測驗.】

解答　B

解析　$\angle A=180^\circ-95^\circ-40^\circ=45^\circ$

$\dfrac{10}{\sin A}=\dfrac{10}{\sin 45^\circ}=2R \quad\Rightarrow\quad R=5\sqrt{2}$

$\therefore$　面積 $=\pi R^2=\pi\left(5\sqrt{2}\right)^2=50\pi$

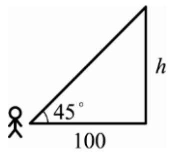


(　　　) 22.小明站在距離行政大樓前100公尺處，測得站立處對樓頂仰角為45°，則行政大樓樓高為　(A)50公尺　(B)$50\sqrt{2}$ 公尺　(C)100公尺　(D)$100\sqrt{3}$ 公尺

【隨堂測驗.】

解答　C

解析



$\tan 45^\circ=\dfrac{h}{100}$

$h=100\times\tan 45^\circ=100\times 1=100$

(　　　) 23.直線 L_1：$x=3$ 與 L_2：$x+\sqrt{3}y-1=0$ 之交角 $\theta=$　(A)30°　(B)45°　(C)60°　(D)90°

【龍騰自命題.】

解答　C

解析　L_1：$x=3$ 為鉛垂線，斜角 $\theta_1=90^\circ$

$L_2: x+\sqrt{3}y-1=0$，斜角 $\theta_2 \quad\Rightarrow\quad \tan\theta_2=m=-\dfrac{1}{\sqrt{3}} \qquad \therefore\quad \theta_2=150^\circ$

$\therefore$　L_1 與 L_2 交角之一為 $\theta=\theta_2-\theta_1=150^\circ-90^\circ=60^\circ$

(　　　) 24.$\sin 15^\circ+\cos 15^\circ=$　(A)0　(B)$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　(C)$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　(D)$\sqrt{6}$

【龍騰自命題.】

解答　C

解析　$\sin 15^\circ+\cos 15^\circ=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}+\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

(　　　) 25.設 $A(-1,\sqrt{3})$，$B(-2,0)$，則 $\overline{AB}$ 的斜角為　(A)30°　(B)60°　(C)120°　(D)150°

【龍騰自命題.】

解答　B